

dr hab. Halszka Tutaj-Gasińska
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 4, Kraków

Recenzja pracy doktorskiej magister Pauliny Wiśniewskiej
*Asymptotic invariants of configurations of points determined by
complex reflection groups*

Praca doktorska pani magister Pauliny Wiśniewskiej poświęcona jest (asymptotycznym) niezmiennikom pewnych układów punktów. Rozważane układy punktów zadane są przez grupy odbić. Precyzyjniej mówiąc, Autorka rozważa konfiguracje punktów danych jako układy pierwiastkowe (root systems) w przestrzeni rzutowej. Dla takich szczególnych układów punktów Autorka postanowiła zbadać niezmienniki takie, jak stała Waldschmidta oraz resurgencja.

Ten obszar badań jest z jednej strony znany od dawna, wystarczy wspomnieć konfiguracje pochodzące od Kleina, z drugiej połowy XIX wieku, podobnie jak konfiguracja Wimanowa. Następnie, poprzez Lemat Schwarza z podobnego okresu i hipotezę Nagaty z 1968 roku trafiamy na niezmiennik nazwany stałą Waldschmidta. Najmłodsze w tym gronie jest pojęcie resurgencji, wprowadzone w 2010 roku przez Bocciego i Harbourne'a.

Z drugiej strony konfiguracje punktów są ciągle świeżym źródłem inspiracji dla matematyków. Dualna konfiguracja Hessego pozwoliła znaleźć pierwszy kontrprzykład zawierania trzeciej potęgi symbolicznej ideału w drugiej potędze algebraicznej (problem ściśle związany z pojęciem resurgencji), a konfiguracja B_3 na płaszczyźnie rzutowej dała początek intensywnym badaniom nad istnieniem i konstrukcją tak zwanych krzywych niespodziewanych.

Przedstawiona praca składa się ze Wstępu, pięciu rozdziałów, Dodatku i Bibliografii. Wstęp zawiera krótkie wprowadzenie historyczne oraz, także krótkie, omówienie uzyskanych wyników.

W pierwszych trzech rozdziałach Autorka przytacza niezbędne w dalszych rozważaniach definicje i fakty. Rozdział pierwszy zawiera podstawowe wiadomości o potęgach symbolicznych, rezolwencie i twierdzeniu Bezouta. Rozdział drugi poświęcony jest grupom odbić, a rozdział trzeci wprowadzeniu stałej Waldschmidta i resurgencji.

Czwarty rozdział, stanowiący jądro pracy, składa się z sześciu podrozdziałów, każdy z nich poświęcony jest innej konfiguracji punktów.

Podrozdział pierwszy prezentuje konfigurację na \mathbb{P}^2 , daną przez system pierwiastkowy H_3 . Autorka oblicza (znaną skądinąd) stałą Waldschmidta tej konfiguracji przy użyciu Twierdzenia Bezouta. Ten fragment pracy można potraktować jako wstęp do kolejnych podrozdziałów.

W podrozdziale drugim (i kolejnych) Autorka przenosi się do przestrzeni rzutowej i rozważa konfigurację D_4 , wyliczając jej stałą Waldschmidta (równą 2).

Podrozdział trzeci poświęcony jest konfiguracji B_4 , dla której wyliczona stała Waldschmidta jest równa 2.

W podrozdziale czwartym Autorka zajmuje się konfiguracją F_4 . Autorka rozważa 24 punkty, P_i , tworzące tę konfigurację oraz 24 płaszczyzny Π_i , powstałe jako płaszczyzny dualne do punktów konfiguracji. Na każdej z płaszczyzn Π_i leży dziewięć spośród punktów P_i .

Główne twierdzenie pracy doktorskiej Autorki mówi, że stała Waldschmidta konfiguracji F_4 wynosi $\frac{8}{3}$. Dowód tego faktu wymaga rozważania nie tylko płaszczyzn Π_i wraz z dziewięcioma wspomnianymi wyżej punktami, ale także trzydziestu dwóch dodatkowych prostych, na których leżą po trzy punkty z F_4 , punktów przecięcia tych prostych z płaszczyznami Π_i oraz prostych zadanych przez te punkty przecięcia. Dopiero taki układ pozwala zastosować, w dość wyrafinowany sposób, opartą na Twierdzeniu Bezouta metodę redukcji.

Dodatkowo w tym podrozdziale Autorka podejmuje próbę wyliczenia resurgencji konfiguracji F_4 . Dostaje oszacowania $\frac{3}{2} \leq \rho(I_{F_4}) \leq \frac{9}{4}$. Na podstawie komputerowych symulacji Autorka formułuje hipotezę $\rho(I_{F_4}) = \frac{3}{2}$.

Piąty podrozdział Rozdziału 4 dotyczy pewnej konfiguracji, nazwanej Z_{20} , która jest dwudziestopunktowym podzbiorem F_4 , ale nie jest zadana przez żaden układ pierwiastkowy. Dla tej konfiguracji Autorka wykazała, że stała Waldschmidta wynosi $\frac{7}{3}$ oraz wyliczyła resurgencję, równą $\frac{12}{7}$.

W podrozdziale szóstym Autorka podejmuje próbę wyliczenia stałej Waldschmidta dla konfiguracji H_4 , składającej się z 60 punktów. Obliczenia w systemie Singular pozwoliły jej stwierdzić, że wśród generatorów piątej potęgi symbolicznej ideału, $I_{H_4}^{(5)}$, są generatory stopnia 19, zatem $\hat{\alpha}(I_{H_4}) \leq \frac{19}{5}$, ale na razie problemem otwartym jest zarówno znalezienie dokładnej wartości $\hat{\alpha}(I_{H_4})$, jak i wyjaśnienie istnienia wspomnianych powierzchni stopnia 19.

Z rozważaną konfiguracją H_4 wiąże się także piąty rozdział pracy Autorki, w którym pokazana jest pewna zaskakująca własność tej konfiguracji.

Otóż H_4 ma własność geproci, czyli rzut tej konfiguracji na płaszczyznę \mathbb{P}^2 jest przecięciem zupełnym, natomiast konfiguracja nie jest ani gridem ani pół-gridem.

Ostatni rozdział pracy czyli Dodatek, zawiera ważniejsze skrypty w Singularze używane przez Autorkę, a także pewne (imponujące) tabele incydencji punktów i prostych związanych z konfiguracją H_4 .

Praca napisana jest dość porządnie i przejrzyste. Autorka nie uniknęła jednak pewnych literówek oraz niezręczności redakcyjnych. Poniżej wypiszę tylko niektóre.

str. 30: Autorka podaje definicję Diagramu Dynkina (Definition 2.22) wraz z przykładem, ale to pojęcie nigdzie później nie jest używane.

str. 39: Powinno być $\alpha(\mathcal{I}) = 4$ oraz $\hat{\alpha}(\mathcal{I}) = 3$.

str. 41: Zamieszczając definicję dwustosunku (cross-ratio, Definition 4.2) warto było też przypomnieć definicję czwórki harmonicznej.

str. 49₂ Powinno być 'matches'.

str. 74₄ Powinna być piąta potęga symboliczna.

Uważam, że praca doktorska pani magister Pauliny Wiśniewskiej jest interesująca, zawiera ciekawe wyniki i obejmuje szerokie spektrum problemów. Dodatkowo należy podkreślić, że Autorka dokonała bardzo drobiazgowej analizy incydencji zachodzących w interesujących ją konfiguracjach. Wykazała się też umiejętnością programowania w systemie obliczeń symbolicznych Singular.

Podsumowując, uważam, że praca pani magister Pauliny Wiśniewskiej spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie pani magister Pauliny Wiśniewskiej do dalszych etapów postępowania.

Halina Tuhey - Czesińska

