Prof. dr hab. Stanisław Spodzieja
Katedra Funkcji Analitycznych
i Równań Różniczkowych,
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, 23 marca 2024 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Pauliny Wiśniewskiej pod tytułem "Asymptotyczne niezmienniki konfiguracji punktów zadane przez zespolone grupy odbić"

Tematyka rozprawy mieści się w klasycznej Geometrii Algebraicznej rzeczywistej i zespolonej, a dokładniej w teorii osobliwości i ich klasyfikacji. Pani Paulina Wiśniewska zajmuje się obliczeniowymi i ilościowymi aspektami ideałów jednorodnych obejmujących badania konfiguracji punktów i hiperpłaszczyzn w przestrzeni rzutowej. Jest to problem klasyczny, sięgający starożytności. Obecnie jest to bardzo aktywny obszar badań związany z kombinatoryką.

Celem pracy było badanie asymptotycznych niezmienników ideałów jednorodnych, a przede wszystkim obliczenie wartości resurgacji oraz stałej Waldschmidta dla pewnych konfiguracji punktów wyznaczonych przez zespolone grupy odbić. Przypomnijmy, że stałą Waldschmidta ideału jednorodnego $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem, nazywamy liczbę

$$\widehat{\alpha}(\mathcal{I}) = \inf\left\{\frac{\alpha(\mathcal{I}^{(m)})}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \text{równoważnie} \qquad \widehat{\alpha}(\mathcal{I}) = \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(\mathcal{I}^{(m)})}{m},$$

gdzie $\alpha(\mathcal{I})$ jest stopniem początkowym ideału $\mathcal{I}$, to znaczy najmniejszą liczbę d taka, że część jednorodna stopnia d ideału $\mathcal{I}$ jest niezerowa, a $\mathcal{I}^{(m)}$ jest m-tą potęgą symboliczną ideału $\mathcal{I}$, czyli w myśl twierdzenia Nagaty-Zariskjiego - zbiorem wielomianów znikających na zbiorze $V(\mathcal{I})$ zer ideału $\mathcal{I}$ z krotnością co najmniej m. Badania tej stałej były prowadzone w analizie zespolonej. W geometrii algebraicznej zapoczątkował je M. Waldschmidt. Leży ona w kręgu zainteresowań wielu matematyków. Badania tej stałej prowadzą między innymi: T. Bauer, S. Calvo, E. Camps Moreno, M.V. Catalisano, S. Di Rocco, E. Guardo, B. Harbourne, J. Huizenga, C. Kohne, A. Laundman, P. Pokora, E. Sarmiento, T. Szemberg. J. Szpond, A. Van Tuyl, Yong-Su Shin.

Dla ideału jednorodnego $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, zachodzi $\mathcal{I}^r \subset \mathcal{I}^{(m)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r \geq m$, gdzie $\mathcal{I}^r$ jest r-tą potęgą ideału $\mathcal{I}$. Problem zawierania $\mathcal{I}^{(m)} \subset \mathcal{I}^r$ jest o wiele trudniejszy. Wiąże się on między innymi z 14-tym problemem Hilberta (co zauważył M. Nagata (1959)). L. Ein, R. Lazarsfeld i K.E. Smith (2001) uzyskali sławny wynik: $\mathcal{I}^{(m)} \subset \mathcal{I}^r$, jeśli $\frac{m}{r} \geq n$. Prowadzi to do ciekawego problemu wyznaczenia stałej (zwanej resurgacją ideału $\mathcal{I}$)

$$\rho(\mathcal{I}) = \sup\left\{\frac{m}{r} : \mathcal{I}^{(m)} \not\subset \mathcal{I}^r\right\}.$$

Mamy więc $1 \leq \rho(\mathcal{I}) \leq n$. Asymptotyczną resurgacją ideału jednorodnego $\mathcal{I}$ nazywamy liczbę

$$\widehat{\rho}(\mathcal{I}) = \sup\left\{\frac{m}{r} : \mathcal{I}^{(ms)} \not\subset \mathcal{I}^{rs} \text{ dla dostatecznie dużych } s\right\}.$$

Jest to ważny niezmiennik ideału jednorodnego $\mathcal{I}$. Badania resurgacji ideału zapoczątkowali C. Bocci i B. Harbourne (2010), a asymptotycznej resurgacji – E. Guardo i B. Harbourne (2013). Podstawowe własności resurgacji można znaleźć w pracy B. Harbourne (2018). Badania tych stałych, oprócz wymienionych wcześniej, prowadzi wielu matematyków, między innymi: M. DiPasquale, B. Drabkin, M. Dumnicki, E. Guardo, A.V. Jayanthan, J. Kettinger, A. Kumar, V. Mukundan, U. Nagel, A. Seceleanu, S. Selvaraja, J.W. Skelton, T. Szemberg, H. Tutaj-Gasińska, A. Van Tuyl, F. Zimmitti. Podobne badania prowadzą również A. Bernardi, L. Chiantini, G. Danham, G. Favacchio, L. Terme i J. Szpond.

Praca doktorska obejmująca 93 strony, składa się z pięciu rozdziałów, opatrzona jest wstępem, wstępem w języku polskim, dodatkiem, bibliografią i spisem ilustracji. We wstępie Autorka umiejscawia tematykę pracy. Wskazuje tu problemy, które chce rozwiązać, nawiązuje do znanych wyników i opisuje strukturę pracy.

W rozdziale pierwszym Autorka podaje podstawowe definicje i oznaczenia z geometrii algebraicznej i algebry przemiennej. Omawia pojęcie potęgi symbolicznej ideału, regularności Castelnuovo-Mumforda oraz krotności przecięcia krzywych w dwuwymiarowej przestrzeni rzutowej.

W rozdziale drugim omawia grupę odbić, to jest grupę generowaną przez odbicia. Odbiciem w $\mathbb{C}^{N+1}$ nazywamy automorfizm liniowy skończonego rzędu, który ma dokładnie N wartości własnych równych 1. Omawia tutaj również "root system", szkoda, że nie podaje polskiego tłumaczenia tego pojęcia. Jest to skończony zbiór wektorów Δ w przestrzeni afinicznej V, który: rozpina przestrzeń V; dla każdego $a \in \Delta$ również $-a \in \Delta$ oraz $\lambda a \notin \Delta$ dla $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 1$; dla każdych $a, b \in \Delta$, wektor $s_a(b)$ będący odbiciem punktu b względem hiperpłaszczy prostopadłej do a również należy do Δ oraz $2\frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle} \in \mathbb{Z}$. Podaje tutaj również przykład D_4 takiego układu, składający sie z 24 punktów w $\mathbb{R}^4$ i przedstawia jego diagram Dynkina.

W rozdziale trzecim Autorka omawia stałą Waldschmidta ideału jednorodnego oraz resurgację i asymptotyczną resurgację. Ilustruje tutaj na przykładzie konfiguracji trzech punktów niewspółliniowych P_1, P_2, P_3 w $\mathbb{P}^2$ pojęcie stopnia początkowego potęg symbolicznych ideału $\mathcal{I} = \mathcal{I}(P_1) \cap \mathcal{I}(P_2) \cap \mathcal{I}(P_3)$ oraz wylicza resurgację tego ideału. Wprowadza tutaj również konfiguracje gwiaździste.

Główne rezultaty pracy, według piszącego opinię, są zebrane w rozdziale czwartym. Przedstawione tutaj wyniki motywowane są pracą [3] z 2018 roku (numeracja cytowanych prac zgodnie ze spisem literatury w rozprawie). Polegają one na wyliczeniu stałej Waldschmidta i resurgacji wybranych konfiguracji punktów. Autorka zaczyna, w punkcie 4.1, od opisu konfiguracji H_3, pochodzącej od "rood system"u piętnastu punktów w $\mathbb{P}^2$ i w twierdzeniu 4.4 dowodzi, że stała Waldschmidta tego układu jest równa 3. W twierdzeniu 4.7 dowodzi, że stała Waldchmidta dla konfiguracji D_4 ("root system" dwunastu punktów w przestrzeni $\mathbb{P}^3$) wynosi dwa, a w twierdzeniu 4.9 pokazuje, że ta stała wynosi 2 dla konfiguracji B_4 szesnastu punktów w $\mathbb{P}^3$.

W punkcie 4.4, Autorka bada F_4 "root system"y dwudziestu czterech punktów w $\mathbb{P}^3$, które sa rozszerzeniam konfiguracji B_4. Dziewięć punktów konfiguracji F_4 leżących na odpowiedniej hiperpłaszczyźnie tworzy konfigurację Z_9 będącą sumą dwóch konfiguracji gwiaździstych. W twierdzeniu 4.13 Autorka pokazuje, że stała Waldschmidta tej konfiguracji jest równa $\frac{5}{2}$. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie 4.15, w którym pani Wiśniewska pokazuje, że stała Waldschmidta konfiguracji F_4 jest równa $\frac{8}{3}$. Po wybraniu odpowiedniego dywizora, z twierdzenia Nagaty-Zariskiego, dostaje natychmiast oszacowanie $\widehat{\alpha}(\mathcal{I}) \leq \frac{24}{9}$. Główne trudności w dowodzie tego twierdzenia polegały na pokazaniu nierówności przeciwnej. Oprócz badań odpowiednich dywizorów, potrzebne były również badania mniej wymiarowych podrozmaitości. Dowód tego twierdzenia jest trudny i bardzo techniczny, sprawdzenie go pochłonęło dużo czasu piszącemu opinię. Dowód ten wymagał dużej pomysłowości, gdyż twierdzenie 4.13 pokazuje, że proste zastosowanie twierdzenia Bezouta dla dywizorów nie doprowadzi do tezy. W punkcie 4.5, Autorka wylicza resurgencję pewnej konfiguracji dwudziestu punktów z konfiguracji F_4, a w punkcie 4.6 - stałą Waldschmidta dla konfiguracji H_4.

Główną ideą dowodów tych twierdzeń jest zastosowanie twierdzenia Nagaty-Zariskiego do uzyskaniu oszacowań (od góry) oraz, po wybraniu najmniejszej liczby m dla której nie zachodzi równość, zastosowanie twierdzenia Bezouta do stosownie dobranej potęgi symbolicznej i układu hiperpłaszczyzn. Idea wydaje się prosta, lecz w tak skomplikowanych przykładach przeprowadzenie odpowiednich obliczeń wymaga dużej sprawności rachunkowej i wiedzy teoretycznej. W dowodzie twierdzenia 4.15 widać to wyraźnie, gdzie do zastosowania twierdzenia Bezouta należało w sposób subtelny wybrać potęgi symboliczne, wykorzystać symetrię rozważanej konfiguracji oraz oprócz badania dywizorów, rozważyć mniej wymiarowe przestrzenie. Do wyliczenia wszystkich płaszczyzn zawierających po trzy punkty konfiguracji F_4 i do wypisania, które punkty należą do poszczególnych płaszczyzn Autorka wspiera się programem komputerowym Singular. Na uwagę zasługuje to, że badanie konfiguracji D_4, B_4, F_4 i H_4 jest nowatorskim podejściem Autorki do badań stałej Waldschmidta konfiguracji punktów w przestrzeni $\mathbb{P}^3$, które dotąd nie było prowadzone.

Bardzo ciekawy jest również rozdział piąty rozprawy. Poświęcony jest on badaniu własności ogólnych rzutów zbiorów punktów symetrycznych w przestrzeni rzutowej. Wiąże się to z pytaniem Polizzi o istnieniu skończonych zbiorów punktów w $\mathbb{P}^3$, których ogólne rzuty na $\mathbb{P}^2$ są pełnymi przecięciami. D. Panov (2011) pokazał, że tak zwane zbiory grid mają tę własność i wtedy Polizzi zapytał o inne zbiory o tej własności. Badania te doprowadziły P. Pokorę, T. Szemberga i J. Szpond do wprowadzenia tak zwanych zbiorów pół-grid, które spełniają postulat Polizzi. Podali oni przykład zbioru 60 punktów w $\mathbb{P}^3$, które są pół-gridami, ale nie są gridami. W badania te doskonale wpisuje się twierdzenie 5.7 rozprawy, gdzie Autorka pokazała, że konfiguracja H_4 punktów w przestrzeni $\mathbb{P}^3$ ma własność geproci (to znaczy spełnia postulat Polizzi) lecz nie jest ani pół-gridem, ani gridem. Dowód tego twierdzenia opiera się na pracach [23] i [8] oraz w dużej mierze na obliczeniach komputerowych, które trudno sprawdzić, lecz przy tym stopniu komplikacji, bezpośredni dowód zająłby bardzo dużo miejsca.

W dodatku Autorka podaje program komputerowy do obliczania stałej Waldschmidta dla konfiguracji H_4 i przytacza wyniki obliczeń.

Omówione powyżej wyniki są ciekawe, wnoszą istotny wkład w rozwój obliczeniowej geometrii algebraicznej, wpisują się w aktualnie prowadzone badania naukowe, a ich dowody wymagały w wielu miejscach niełatwych i bardzo subtelnych rozważań. Wstęp dość dobrze umiejscawia i motywuje podjęte rozważania. Z wszystkimi problemami Autorka poradziła sobie bardzo dobrze. Dowody są w zasadzie elementarne i dość techniczne przy wykorzystaniu dość zaawansowanych pojęć, lecz zrozumiałe. Pomagają w tym liczne komentarze do głównych tez pracy. Drobną trudnością jest sprawdzenie tych części dowodów, w których wykorzystywane są techniki komputerowe. Praca w pewnym sensie jest samowystarczalna, Autorka podaje wszystkie niezbędne definicje i dowodzi potrzebne własności oraz przytacza znane własności.

Praca ma charakter dość techniczny, sprawdzenie jej wymagało długiego czasu. Zawiera ona pewne drobne błędy zecerskie i niedociągnięcia, na przykład:

- Wstęp w języku polskim lepiej byłoby nazwać streszczeniem, bo jest znacznym skróceniem wstępu w języku angielskim.
- Stosowanie metod komputerowych w dowodach twierdzeń 4.15 i 5.7 utrudnia sprawdzenie tych dowodów.
- Szkoda, że Autorka nie zacytowała pracy Waldschmidta i innych prac źródłowych, od których zostały zaczerpnięte pojęcia używane w pracy.
- Szkoda, że Autorka nie podała odnośnika do literatury dotyczącego diagramu Dynkina.
- W dowodach twierdzeń 4.4, 4.7, 4.13 i 4.15 stosowane jest twierdzenie Nagaty-Zariskiego lecz przytoczone tylko w dowodzie twierdzenia 4.4. Jest to trochę dziwne, bo twierdzenie Bezouta jest cytowane wszędzie tam, gdzie jest używane.
- W preliminariach Autorka dość szczegółowo omawia pewne pojęcia z elementarnej geometrii algebraicznej i algebry przemiennej. Szkoda, że nic nie wspominała o dywizorach i systemach liniowych, których również używa w pracy.
- We wzorze $\bigoplus_{i=1}^{k} R(-a_i) \to \mathcal{I} \to 0$ na stronie 17 nie wiadomo co to jest a_i. Dotyczy to również definicji 1.21 oraz 1.23.
- na stronie 80, w dowodzie twierdzenia 5.7, Autorka wypisuje rodzinę prostych L_i oraz M_i przy pomocy ℓ_j. Nie znalazłem definicji tych ℓ_j, poza ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Wydaje się, że były one obliczane przez program komputerowy przytoczony w dodatku. Tam też podano, które punkty należą do poszczególnych płaszczyzn ℓ_j.
- Szkoda, że Autorka nie zrobiła spisu oznaczeń i wykazu pojęć oraz tłumaczenia używanych pojęć na język polski.
- W pracy występują drobne błędy zecerskie, których nie wypisuję, bo są łatwe do poprawienia.

Podsumowując, tematyka pracy doktorskiej Pani Pauliny Wiśniewskiej sytuuje się w klasycznej Geometrii Algebraicznej rzeczywistej i zespolonej, a dokładniej w teorii osobliwości i ich klasyfikacji. Pani Paulina Wiśniewska zajmuje się obliczeniowymi i ilościowymi aspektami ideałów jednorodnych obejmujących badania konfiguracji punktów i hiperpłaszczyzn w przestrzeni rzutowej. Celem pracy było badanie asymptotycznych niezmienników ideałów jednorodnych, a przede wszystkim obliczenie wartości resurgacji oraz stałej Waldschmidta dla pewnych konfiguracji punktów wyznaczonych przez zespolone grupy odbić. Wszystkie dowody wymagały dużej biegłości rachunkowej i pomysłowości. Lektura pracy pozwala wnioskować, że Autorka posiada gruntowną wiedzę i dobrą orientację w zakresie prowadzonych badań. Widać również jej dużą samodzielność w prowadzonych badaniach naukowych. Wyniki uzyskane w pracy oraz ich rozwiązania są oryginalne, wzbogacają one stan obecnej wiedzy w zakresie stałej Waldschmidta i resurgacjii. Badanie konfiguracji D_4, B_4, F_4 i H_4 punktów w przestrzeni $\mathbb{P}^3$ jest nowatorskim podejściem Autorki do badań stałej Waldschmidta, które dotąd nie było prowadzone w przestrzeniach wyżej wymiarowych niż dwa.

Stwierdzam, że recenzowana praca Pani Pauliny Wiśniewskiej spełnia wymogi ustawowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie Pani mgr Pauliny Wiśniewskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

S. Spodzieja