Prof. dr hab. Andrzej Wereszczyński
Zakład Teorii Pola
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki
Stosowanej UJ
e-mail: andrzej.wereszczynski@uj.edu.pl

Kraków, 25.04.2024

JAGIELLONIAN
UNIVERSITY
IN KRAKOW

Faculty of Physics, Astronomy and Applied Computer Science

Recenzja
pracy doktorskiej mgra Jacka Gatlika
“Kink Dynamics in the sine-Gordon Model: Interaction with Inhomogeneities“

Praca doktorska pana mgra Jacka Gatlika liczy 95 stron i składa się z trzech rozdziałów oraz z apendyksów zawierających cztery opublikowane prace stanowiące podstawę rozprawy. Rozdział pierwszy poświęcony jest na pobieżne wprowadzenie do teorii solitonów topologicznych na przykładzie dwóch całkowalnych modeli: równania KdV oraz równania sine-Gordona. W rozdziale drugim, podzielonym na cztery podrozdziały, znajdujemy zwięzłe omówienie oryginalnych rezultatów osiągniętych przez doktoranta a opublikowanych w czterech artykułach zawartych w pracy doktorskiej. Są to dwie prace w Physica D (2021 i 2023) oraz dwie w Physical Review E (2023 i 2024). Ostatni rozdział zawiera krótkie podsumowanie wyników. Rozprawę doktorską kończy wykaz literatury zawierający 67 pozycji.

Tematyka rozprawy doktorskiej dotyka niezmiernie ważnych zagadnień z dziedziny fizyki i matematyki nieliniowych, klasycznych teorii pola, a mianowicie dynamiki solitonów topologicznych. Solitony topologiczne występują w wielu kontekstach fizyki teoretycznej i doświadczalnej - od teorii fundamentalnych (instantony w Chromodynamice Kwantowej czy sfaleron w modelu oddziaływań elektrosłabych) do rozmaitych realizacji w kosmologii, astrofizyce, fizyce materii skondensowanej i optyce.

W szczególności praca poświęcona jest dynamice solitonów topologicznych w (1+1) i (2+1) wymiarach w zmodyfikowanym modelu sine-Gordon. Solitony takie są tożsame z tzw. fluksonami. Są to obserwowalne doświadczalnie kwazicząstki występujące w nadprzewodzących złączach Josephsona. Można zatem oczekiwać, że zaprezentowana matematyczna analiza nieliniowych równań ruchu flfksonów znajdzie eksperymentalną realizację.

ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail: wydzial.fais@uj.edu.pl

Rozprawa doktorska rozpoczyna się rozdziałem omawiającym dwa całkowalne przekłady równań solitonowych: równania KdV (solitony nietopologiczne) i sine-Gordon (solitony topologiczne). W tym drugim przypadku zaprezentowane są rozwiązania jednokinkowe, rozproszeniowe rozwiązanie kink-antykink wraz ze szkicem wyprowadzenia tych rozwiązań za pomocą transformacji Backlunda czy transformacji odwrotnego rozpraszania. Następnie Pan Gatlik prezentuje wyprowadzenie równania sine-Gordon jako równania dla dynamiki różnicy faz funkcji falowych opisujących pary Coopera w dwóch warstwach nadprzewodzących, rozdzielonych cienką warstwą izolatora - tzw. złącze Josephsona. Jest to punkt wyjścia do modyfikacji równania sine-Gordona.

Rozdział drugi wprowadza zmodyfikowane równanie sine-Gordona o tzw. niejednorodność (lub innymi słowy impurity), która łamiąc translacyjną niezmienniczość wyjściowego równania, prowadzi do złamania całkowalności. Ma to bardzo silne reperkusje dla dynamiki solitonów. Teoria nie posiada nieskończenie wielu całek ruchu i dzięki temu możliwe są procesy anihilacyjne lub kreacyjne. Konkretna modyfikacja studiowana przez doktoranta została zaproponowana wcześniej przez prof. Dobrowolskiego jako efekt zakrzywienia złącza Josephsona. W tej części rozprawy Autor dyskutuje po kolei każdą z czterech opublikowanych prac.

Pierwsza praca, Physica D (2021), poświęcona jest konstrukcji modelu efektywnego opisującego zderzenie kinku z impurity w przypadku gdy impurity ma zlokalizowaną postać typu schodkowego, przy czym badania ograniczają się do przypadku przyciągającej niejednorodności. Głównym zagadnieniem jest modelowanie pełnej dynamiki (cząstkowe równanie różniczkowe) za pomocą modelu efektywnego. W szczególności Autor koncentruje się na modelowaniu prędkości krytycznej rozdzielającej przypadek rozproszeniowy (w stanie out mamy swobodny kink odbity do niejednorodności) od przypadku przejścia przez impurity.

Technika użyta do konstrukcji modelu efektywnego, w tej jak i w kolejnych pracach, to technika współrzędnych kolektywnych, polegająca na redukcji nieskończenie wymiarowego problemu teoriopolowego (równania cząstkowe na pole skalarne) do problemu „mechanicznego", tj. o skończonej liczbie stopni swobody (układ zwyczajnych równań różniczkowych). Można to osiągnąć np. poprzez identyfikację podprzestrzeni konfiguracji pola (profili pola skalarnego) parametryzowanych przez skończoną liczbę parametrów - współrzędnych kolektywnych. W następnym kroku wstawia się taki ograniczony zbiór konfiguracji pola do Lagranżjanu i wycałkowywuje po zmiennych przestrzennych, zakładając, iż cała analizowana dynamika ukryta jest w ewolucji współrzędnych kolektywnych. W tym podejściu najważniejszy krok to poprawna identyfikacja współrzędnych efektywnych tj. konfiguracji pól, o których zakładamy, że dają najistotniejszy wkład do rozważanych procesów.

W pracy tej porównywane są następujące jednowymiarowe (jedna współrzędna kolektywna) modele efektywne: (I) model oparty o relatywistyczny profil kinku bez impurity tj. równanie (35); (II) podejście perturbacyjne zaproponowane przez McLaughlina; (III) model oparty o rzutowanie równań ruchu na mod zerowy; (IV) model oparty o rzutowanie na gęstość energii. W rzeczywistości podejście (I) i (III) są sobie równoważne.

Oryginalnym i ciekawym wynikiem jest zauważenie, że autorskie podejście (IV) najlepiej modeluje pełną dynamikę. Znaleziona prędkość krytyczna bardzo dobrze zgadza się z wartości z pełnej teorii - szczególnie dla prędkości początkowych mniejszych niż 0.4. Dla większych prędkości widać rosnącą rozbieżność. Autorzy motywują dobre działanie modelu efektywnego (IV) poprzez fakt, iż kink nie jest w pełni ciałem sztywnym i tylko część jego „materii" (gęstości energii) oddziaływuje z impurity. Z tego powodu zostaje wprowadzona „masa aktywna" kinku. Masa ta jest parametrem fitowanym do dynamiki. Otrzymany model efektywny jest tożsamy z modelem (I), przy czym masa swobodnego kinku jest zamieniona na masę aktywną. Taki model daje bardzo dobre (wręcz idealne) wartości prędkości krytycznej. Mankamentem jest brak teoretycznego wyliczenia masy aktywnej.

W pracy drugiej, Physica D (2023), doktorant wspólnie z promotorem analizują to samo równanie z dwoma modyfikacjami. Dodany jest człon dyssypacyjny (pierwsza pochodna po czasie) oraz zewnętrzna siła stochastyczna tj. biały szum. W tym przypadku najważniejszą obserwablą jest prawdopodobieństwo przejścia kinku przez niejednorodność. Wielkość ta jest opisana przez równanie Fokkera-Plancka. Autorzy postulują efektywne równanie ruchu kinku, r. (7), które pozwala na zastosowanie wzoru Fokkera-Plancka na prawdopodobieństwo przejścia przez impurity.

W granicy gdy temperatura szumu dąży do zera zaobserwowano istnienie siły progowej rozdzielającej przypadek przejścia przez impurity od przypadku gdy kink jest zatrzymany przed niejednorodnością (lub na niej). Siła ta wiąże się jednoznacznie ze stacjonarną prędkością kilku.

Zastanawiającym wynikiem jest zaobserwowanie okien rezonansowych (struktury chaotycznej) w granicy niskich temperatur.

Trzecia praca, Phys. Rev. E (2023), skupia się na opisaniu oddziaływania kilku z niejednorodnością sprzężoną w standartowy dla Autorów sposób. Tym razem niejednorodność jest gładką, eksponencjalnie zlokalizowaną funkcją. Celem pracy jest porównanie, które z powyżej opisanych jednowymiarowych modeli współrzędnych kolektywnych, oraz nowych rozszerzeń do modeli efektywnych z dwoma współrzędnymi kolektywnymi, najlepiej reprodukują pełna dynamikę tj. dynamikę zadaną cząstkowymi równaniami różniczkowymi.

JAGIELLONIAN UNIVERSITY IN KRAKOW

Faculty of Physics, Astronomy and Applied Computer Science

ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail: wydzial.fais@uj.edu.pl

Autorzy w pierwszym kroku ograniczają się do modelu kolektywnego z jedną współrzędną. Jest to motywowane brakiem masywnych (dodatnich) modów dyskretnych. Jedyny mod dyskretny to mod niestabilny, wywodzący się z odpychającego charakteru przyjętej impurity. Mod ten, w przypadku braku niejednorodności jest zwykłym modem zerowym, więc z tego punktu widzenia jest uwzględniony w analizowanych modelach efektywnych. W przypadku, gdy dodana jest siła wymuszająca i tłumienie (dyssypacja) struktura modów zmienia się w oczywisty sposób - mamy do czynienia z tłumionym modem oscylującym lub (dla odpowiednich wartości parametrów modelu) z modem przetłumionym (bez oscylacji).

Analizowane są trzy modele współrzędnych kolektywnych: (I) model oparty o nierelatywistyczny (statyczny) profil kinku bez impurity; (II) model oparty o rzutowanie równań ruchu na mod zerowy; (III) model oparty na niezachowawczym Lagranżjanie. Metoda (I) daje jakościowo dobre wyniki, lecz ilościowo zaobserwowano znaczące odchylenia od trajektorii w pełnej teorii. Jest to zgodne z poprzednimi rezultatami. Metoda (II) - tożsama z (I) w przypadku braku tłumienia - pozwala jakościowo odtworzyć dynamikę kinku, także w sytuacji gdy uwzględnimy tłumienie i zewnętrzną siłę. Np. w przypadku zderzenia poniżej prędkości krytycznej, bardzo dobrze odtworzono wielokrotne odbicia od niejednorodności.

W następnym kroku testowane są modele efektywne z dwoma współrzędnymi kolektywnymi - obok pozycji kinku (kinetyczny stopień swobody) uwzględniony został także pewien wewnętrzny stopień swobody, który można utożsamić z tzw. czynnikiem skali lub z modem Derrika. Taka współrzędna kolektywna (mod) modeluje skrócenie Lorentza zboostowanego kinku, i z tego powodu konstrukcja ta jest czasem nazywana jako Relatywistyczna Moduli Space. Metoda (I) i (II) daje znacząco lepsze przewidywania pozycji kinku, gdy uwzględniono mod Derrika. Również metoda (III) w znaczący sposób poprawia swoje przewidywania i wyglada na najlepsze podejście kolektywne dla rozważanych procesów. Wydaje się, że współrzędna kolektywna związana z modem Derrika jest bardzo ważna dla modelowania dynamiki kinków. Jest to zgodne z ostatnimi wynikami badań.

Należy zauważyć, że model z dwoma współrzędnymi efektywnymi wymaga dość dobrej kontroli błędów numerycznych, choć w analizowanych przypadkach nie należy raczej oczekiwać pojawienia się subtelności typu osobliwości metryki na moduli space, związanych z procesami anihilacji kinku i antykinku.

JAGIELLONIAN UNIVERSITY IN KRAKOW

Faculty of Physics, Astronomy and Applied Computer Science

W czwartej, ostatniej pracy, Phys. Rev. E (2024), mamy do czynienia z uogólnieniem modelu sine-Gordon z niejednorodnością na przypadek dwóch wymiarów przestrzennych. Rozpatrywano kilka rodzajów niejednorodności: np. gdy deformacją zlokalizowana wokół początku układu współrzędnych i zależy od jednej lub obu współrzędnych. Istotne jest natomiast to, iż równanie ruchu jest zdeformowane niesymetrycznie - tylko pochodna po „x” jest sprzężoną do impurity.

W głównej części pracy przebadano zderzenie ściany domenowej (kinku) w tak zdeformowanym, dwuwymiarowym modelu sine-Gordona. Rozważano kink propagujący się wzdłuż kierunku „x”, który napotyka na swojej drodze niejednorodność (rozciągająca się nieskończenie w kierunku „y” lub zlokalizowaną w kierunku „y”). Zderzenia przedstawiono w postaci filmów. Dynamika jest w tym przypadku dość bogata. Ściana domenowa napotykając impurity zmienia nie tylko swoją grubość ale i kształt (krzywiznę).

Moje uwagi do pracy są następujące:

1. W pracach [1], [2] i [3] rozważana jest niejednorodność typu odpychającego. Z tego powodu oddziaływanie z kinkiem jest stosunkowo proste - wykluczone są (w przypadku teorii bez dyssypacji i siły wymuszającej) stany związane impurity-kink. Przyciągający typ niejednorodności pozwoliłby na dodatkowe, bardziej nietrywialne testowanie modeli efektywnych.

2. Dodatkowo rozważana impurity (jak i kink w swobodnej teorii sine-Gordon) nie mają modów wewnętrznych. Z tego powodu (również w przypadku teorii bez dyssypacji i siły wymuszającej) nie oczekujemy pojawienia się zachowań chaotyczny w zderzeniach kink-niejednorodność. Takie zachowania (i związana z nią struktura fraktalna w formowaniu stanu końcowego) są efektem rezonansowego mechanizmu transferu energii pomiędzy kinetycznym i potencjalnym (wewnętrznym) stopniem swobody. Rozważenie przyciągającej impurity może skutkować pojawieniem się modu normalnego zlokalizowanego na niej. W efekcie oczekiwałbym pojawienia się struktury chaotycznej. Testowanie modeli współrzednych kolektywnych na takiej teorii było by znacznie ciekawsze i dużo bardziej nietrywialne np. poprzez modelowanie kreacji pary kink-antykink na impurity.

   W literaturze znane są modele efektywne opisujące taką strukturę fraktalna (na przykład w zderzeniach kink-antykink w modelu phi^4, phi^6 czy double sice-Gordon), lecz jest to wciąż stosunkowo słabo zbadana i zrozumiana część dynamiki solitonów i nowe wyniki były by tutaj bardzo ciekawe.

3. Układ kink - odpychającą impurity może być potraktowany jako sfaleron tj. skończenie energetyczne, lecz niestabilne, rozwiazanie równań ruchu (punkt siodłowy). W modelach analizowanych przez p. Gatlika taki sfaleron

ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail: wydzial.fais@uj.edu.pl

jest realizowanych gdy kink znajduje się dokładnie na niejednorodności. W literaturze dyskutuje się ostanie o wpływie rozwiązań sfaleronowych na dynamikę solitonów.

4. W pracy [2] wspomniane jest, że w granicy niskiej temperatury obserwowano okna rezonansowe. Jest to bardzo interesującą uwaga ale niestety brak pogłębionej analizy tego zagadnienia. Jak ona wyglada? Jaki jest powód istnienia tej struktury? Autorzy wykazują, że teoria nie ma żadnych masywnych modów normalnych więc nie jest oczywiste co jest przyczyna pojawienia się struktury rezonansowej. W teorii phi^4 kinki mają mod wibracyjny (shape mod), w teorii phi^6 brak takich zlokalizowanych modów ale istnieją mody zdelokalizowane, rozciągające się pomiędzy zdarzającymi się solitonami.

5. W pracy [2] wielkości \Omega i \omega są fitowane do numeryki. Oczywiście obniża to trochę siłę przewidywania modelu efektywnego, który teraz zależy od dwóch, w zasadzie dowolnych parametrów. Ma to związek z tzw. resztkowym oddziaływaniem pomiędzy kinkiem a impurity - równanie (7). Jak dobre jest założenie o stałym oddziaływaniu resztkowym? Szczególnie, że niejednorodność, jak i kink, zlokalizowane są przecież eksponencjalne.

6. Czy Autor ma jakiekolwiek propozycje jak obliczyć masę aktywną z pracy [1]? W pracy wyłącznie fituje się tę wielkość do numeryki zderzeń kink-niejednorodność.

7. Dlaczego metoda rzutowania na gęstość energii została zastosowana tylko w pracy [1], skoro wykazano, że jest to najlepsza metoda do konstrukcji modelu efektywnego?

8. W pracy [3] nie są podane warunki początkowe dla dynamiki w modelu efektywnym z dwoma współrzędnymi kolektywnymi. Jednocześnie zaobserwowano, że już od chwili początkowej \gamma (druga współrzędna kolektywna) oscyluje. Jest to zachowanie niefizyczne i niezgodne z warunkiem początkowym w pełnej teorii, gdzie kink porusza się ruchem jednostajnym ze stałą \gamma (zboostowany kink). Wygląda na to ze warunki początkowe w modelu efektywnym i teorii pola nie są tożsame! Proszę porównać z

   N. Manton, K. Oles, T. Romanczukiewicz, A. Wereszczynski, Collective coordinate model of kink-antikink collisions in φ^4 theory, Phys. Rev. Lett. 127 (2021) 071601; [arXiv:2106.05153].

9. Patrząc z ogólniejszego punktu widzenia trochę brakuje bardziej geometrycznej analizy otrzymanej moduli space (przestrzeni współrzędnych kolektywnych), szczególnie w przypadku modeli efektywnych z dwoma współrzędnymi. Jaka jest dokładnie metryka, czy ma osoblowisci, jak jest geometria tej przestrzeni, krzywizna? Dałoby to bardziej kompletny opis i

pozwoliłoby lepiej porównać otrzymane wyniki z modelami współrzędnych efektywnych dla procesów w innych teoriach solionowych (zderzenia kink-antykink, worteksy w Abelowym Modelu Higgsa itp.).

Pragnę podkreślić, iż moja ocena pracy jest jednoznacznie pozytywna. Rozprawa doktorska Pana Jacka Gatlika łączy w sobie wysokiej klasy rachunki numeryczne (dynamika PDE pełnych równań teorio-polowych i dynamika ODE równań modeli efektywnych) jak i szczegółową analizę analityczną otrzymanych wyników (np. budowa modeli współrzędnych kolektywnych).

Bardzo istotną kwestią jest znaczący, samodzielny wkład doktoranta w pracach [1]-[4]. Przede wszystkim wykonał on osobiście wszystkie obliczenia numeryczne dla PDE (pełna teoria) i ODE (modele efektywne). Dodatkowo, był odpowiedzialny za część obliczeń analitycznych oraz za przygotowanie ostatecznej wersji artykułów wchodzących w skład rozprawy.

Bezwątpienia, praca spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuję o dopuszczenie Pana Jacka Gatlika do dalszych etapów postępowania nadania stopnia naukowego doktora.

Prof. dr hab. Andrzej Wereszczyński

Podpisany elektronicznie przez
Andrzej Wereszczyński
25.04.2024
16:32:16 +02'00'

JAGIELLONIAN
UNIVERSITY
IN KRAKOW

Faculty
of Physics,
Astronomy
and Applied
Computer Science

ul. prof. Stanisława
Łojasiewicza 11
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664-48-90
fax +48(12) 664-49-05
e-mail:
wydzial.fais@uj.edu.pl