Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej
w Krakowie

Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Dyscyplina Matematyka

mgr Marcin Zieliński

Geometryczne i homologiczne własności układów gładkich krzywych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Praca Doktorska

napisana pod kierunkiem
dra hab. Piotra Pokory, prof. UKEN

Kraków 2024

Chciałbym serdecznie podziękować
mojemu promotorowi Piotrowi Pokorze
za wsparcie i zaangażowanie,
dzięki któremu możliwe było napisanie tej pracy.
Dziękuję za poświęcony czas i pomoc,
cenne wskazówki, sugestie, uwagi i dużo cierpliwości.

Spis treści

Wstęp

Głównym celem niniejszej pracy doktorskiej jest zbadanie własności algebraiczno-kombinatorycznych układów krzywych gładkich na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Ten nurt badań jest obecny w światowej matematyce od blisko 40 lat, a mianowicie od momentu sformułowania hipotezy Terao (choć niektórzy autorzy wskazują, że hipoteza ta powinna nosić miano hipotezy Terao-Saito), która przewiduje, że dla układów hiperpłaszczyzn zawartych w $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ algebraiczna własność wolności układu jest w pełni determinowana przez jego kratę przecięcia. Hipoteza ta jest uznawana za jeden z najważniejszych i najtrudniejszych otwartych problemów w kombinatorycznej geometrii algebraicznej. W przypadku płaskim, tj. dla $n = 2$, hipoteza ta została zweryfikowana (tylko!) dla układów $d \leqslant 14$ prostych, co też pokazuje z jak trudnym i skomplikowanym problemem mierzą się badacze na całym świecie. Jak się okazało później, hipoteza Terao jest tylko jednym z wielu trudnych problemów badawczych z pogranicza algebry i kombinatoryki, i możemy przywołać całą listę podobnych problemów, które dodatkowo zahaczają o topologię, np. problem nietrywialności wielomianów Alexandera wyznaczonych przez układy prostych, problemy zawierania dla potęg symbolicznych ideałów jednorodnych stowarzyszonych z konfiguracjami punktów, czy też możemy wspomnieć o problematyce konstruowalności par Zariskiego.

W niniejszej pracy skupimy się na układach, które składają się z gładkich krzywych płaskich stopnia 1, 2, oraz 4. Zmiana ta, tj. dopuszczenie krzywych stopnia większego niż 1, ma charakter fundamentalny, głównie ze względu na pojawiające się komplikacje. W celu zobrazowania sytuacji przytoczymy tylko kilka utrudnień, mianowicie:

- osobliwości zwyczajne dla układów krzywych, w odróżnieniu od przypadku układów prostych, przestają być quasi-jednorodne,
- wiele technik działających dla układów prostych przestaje mieć zastosowanie w ogólniejszej sytuacji, np. gdy dopuszczamy gładkie stożkowe,
- jest bardzo mało znanych narzędzi, które mogą pozwolić na efektywną pracę z układami krzywych, np. w kontekście ograniczania słabych kombinatoryk układów,

- zdecydowanie wzrasta złożoność obliczeniowa dla problemów algebry homologicznej, np. gdy chcemy wyznaczyć minimalne rezolwenty wolne algebr ilorazowych.

W niniejszej pracy doktorskiej skupimy się na dwu ważnych aspektach, mianowicie na tworzeniu narzędzi, które pozwalają badać własności krzywych z perspektywy kombinatorycznej, oraz na konstrukcjach układów krzywych z ciekawymi własnościami algebraiczno-kombinatorycznymi. Prowadząc nasze badania, zauważyliśmy pewne luki w kombinatorycznej teorii układów prostych bistycznych stowarzyszonych z gładkimi płaskimi kwartykami i stało się to dla nas motywacją do jej uzupełnienia. Przedstawmy teraz, pokrótce, najważniejsze rezultaty badawcze uzyskane w wyniku naszych badań oraz strukturę niniejszej pracy doktorskiej.

W rozdziale pierwszym przypomnimy definicje i twierdzenia, które uważamy za istotne i niezbędne z punktu widzenia tematyki pracy. Rozdział ten jest podzielony na trzy obszary tematyczne, które odnoszą się do różnych aspektów teorii krzywych. I tak wpierw skupimy się na analitycznych własnościach układów płaskich krzywych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Dalej wprowadzimy najważniejsze pojęcia w kontekście naszej rozprawy, między innymi takie jak: minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygii ideału jakobianowego stowarzyszonego z krzywą, krzywa płaska m-syzygijna, krzywa wolna, krzywa niemal wolna, krzywa plus-jeden generowana, a także ważne twierdzenia podające związki między tymi pojęciami np. Twierdzenia 1.2 i 1.3 podające warunki na to, aby krzywa była wolna lub niemal wolna. W trzeciej części pierwszego rozdziału przywołujemy szczególne uogólnienie nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau na przypadek powierzchni log kanonicznych z wykorzystaniem orbifoldowej charakterystyki Eulera autorstwa Langera (zobacz Twierdzenie 1.6). Twierdzenie to jest dla nas bardzo istotnym narzędziem wykorzystywanym w tej rozprawie (zobacz dowody Twierdzeń 2.3, 3.1).

W rozdziale drugim badamy układy gładkich stożkowych, które dopuszczają tylko pewne ADE osobliwości. Interesują nas wzajemne zależności pomiędzy liczbą osobliwości A_1, A_3, D_4, A_5, A_7 i liczby stożkowych tworzących dany układ. Korzystając z nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau oraz twierdzenia Bézouta, wyznaczamy związek między tymi wielkościami w postaci następującej nierówności.

Twierdzenie **A** (zobacz Twierdzenie 2.3)
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem $k \geqslant 3$ gładkich stożkowych, który dopuszcza n_2 osobliwości A_1, t_3 osobliwości A_3, n_3 osobliwości D_4, t_5 osobliwości A_5, oraz t_7 osobliwości A_7. Wówczas zachodzi następująca nierówność typu Hirzebrucha:

$$560k + 100n_2 + 75n_3 \geqslant 608t_7 + 404t_5 + 184t_3.$$

Otrzymana nierówność pozwala wyznaczyć ograniczenia górne na liczbę osobliwości A_5

i A_7 w układach gładkich stożkowych, które dopuszczają tylko pewne typy osobliwości, zobacz Wniosek 2.1. Jeśli oznaczymy przez t_{2m+1} liczbę punktów osobliwych typu A_{2m+1} dla $m \geqslant 0$, oszacowania te w zależności od liczby stożkowych k tworzących układ mają postać:

$$t_5 \leqslant \frac{25}{88}k^2 + \frac{45}{88}k,$$
$$t_7 \leqslant \frac{25}{126}k^2 + \frac{5}{14}k.$$

Inne zastosowanie nierówności z Twierdzenia 2.1 dotyczy jej wykorzystania w poszukiwaniu układów wolnych danego stopnia. Na przykład, ponieważ nie wiemy, czy można skonstruować układ wolny złożony z czterech gładkich stożkowych dopuszczających osobliwości A_1, A_3, D_4, A_5 i A_7, to można spróbować ograniczyć liczbę dopuszczanych słabych kombinatoryk dla takich układów. Wobec tak zaproponowanej strategii Stwierdzenie 2.2 wymienia słabe kombinatoryki tych wolnych układów stożkowych, których nie udało się wyeliminować metodami stricte kombinatorycznymi, a które można wykluczyć, korzystając z Twierdzenia 2.1, co też pokazuje potencjał stojący za metodami odnoszącymi się do nierówności typu Bogomołowa-Miyaoki-Yau.

W rozdziale trzecim zajmujemy się układami gładkich kwartyk i prostych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Nasze rozważania rozpoczynamy od ogólnego wyniku pozwalającego ograniczyć słabe kombinatoryki dla układów kwartyk i prostych, zawierających tylko pewne określone osobliwości quasi-jednorodne.

Twierdzenie **B** (zobacz Twierdzenie 3.1)
Niech $\mathcal{QL} = \{\ell_1, \ldots, \ell_d, Q_1, \ldots, Q_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem składającym się z $d \geqslant 1$ prostych oraz $k \geqslant 1$ gładkich kwartyk. Niech $4k + d \geqslant 6$. Przypuśćmy, że $\mathcal{QL}$ dopuszcza n_2 prostych punktów podwójnych A_1, t_3 osobliwości A_3, t_5 osobliwości A_5, d_6 osobliwości D_6, t_7 osobliwości A_7, n_3 osobliwości D_4 oraz n_4 osobliwości X_9. Wówczas zachodzi następująca nierówność:

$$56k + n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant d + \frac{13}{8}d_6 + \frac{5}{2}t_3 + 5t_5 + \frac{29}{4}t_7.$$

W dalszej części rozdziału przytaczamy pewne znane fakty dotyczące prostych bistycznych do kwartyk gładkich, a następnie dowodzimy kilka ciekawych faktów opisujących układy prostych bistycznych do kwartyk Kleina, Dycka i Komiya-Kuribayashiego (zobacz Stwierdzenia 3.4, 3.5, 3.6).

W kolejnej części tego rozdziału przedstawimy pełny opis słabych kombinatoryk układów 28 prostych bistycznych do bardzo symetrycznych gładkich kwartyk, podając również odpowiednie równania tychże prostych, jak i współrzędne punktów poczwórnych, i same incydencje. Powyższe informacje zawierają Tabele 3.1 do 3.9.

W czwartym rozdziale omówimy własności wolność, niemal wolność oraz plus-jeden generowania dla układów składających się z prostych i jednej gładkiej kwartyki, a w końcowej części rozdziału także dla układów złożonych z elementów pewnego pęku kwartyk. Na początku rozdziału dowodzimy Stwierdzenia 4.1, 4.2, 4.3 orzekające, że nie istnieje układ wolny lub niemal wolny złożony z gładkiej kwartyki i jednej prostej i, co więcej, jeśli dołożymy do układu drugą prostą i ograniczymy się do pewnych osobliwości quasi-jednorodnych, to taki układ również nie może być układem wolnym. W kolejnych kilku stwierdzeniach przedstawiamy konkretne układy wolne, niemal wolne, jak i plus-jeden generowane złożone z kwartyki Dycka i wybranych prostych bistycznych. Przykładowo, Stwierdzenia 4.5, 4.6 przedstawiają układy wolne złożone z kwartyki Dycka i, odpowiednio, czterech bądź pięciu wybranych prostych bistycznych do tej kwartyki. Dalsza analiza układów prostych bistycznych dotyczy układów stowarzyszonych z kwartyką Kleina. Specyfika układów złożonych z kwartyki Kleina i prostych bistycznych wynika z faktu, że każda prosta bistyczna do kwartyki Kleina ma z nią dokładnie dwa punkty wspólne będące osobliwościami A_3. Brak punktów styczności A_7 skutkuje tym, że istnieje mniej możliwości na skonstruowanie układów o relatywnie dużej całkowitej liczbie Tjuriny. Z tego powodu w pracy podajemy tylko jeden typ plus-jeden generowanych układów złożonych z kwartyki Kleina i czterech prostych bistycznych przecinających się w punkcie poczwórnym, zobacz Stwierdzenie 4.9. Układy te jednakże są interesujące w zestawieniu z [13, Theorem 2.4] oraz [13, Corollary 5.3] pochodzących z pracy autorstwa Dimci i Sticlaru, gdyż realizują maksymalny w stosunku do stopnia układu wykładnik d_3 dla krzywych 3-syzygijnych. Ostatnia część rozdziału czwartego poświęcona jest badaniu pęku krzywych

$$\mathcal{P}: \quad uK_1 + vK_2, \quad (u:v) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

gdzie, odpowiednio, K_1 to kwartyka Komiya-Kuribayashiego, a K_2 to kwartyka rozkładalna złożona z pewnych czterech prostych hiperoskulujących. Z krzywych należących do pęku konstruujemy układ wolny C_3 złożony z naszych bazowych kwartyk K_1, K_2 oraz dwóch specjalnie dobranych osobliwych nierozkładalnych kwartyk z pęku.

Układ ten jest interesujący ze względu na fakt, iż pęk zawiera krzywą niezredukowaną. Ten wniosek wynika z analizy układu z zastosowaniem Twierdzenia 4.1, w którym to Dimca [8, Theorem 1.8] podaje charakteryzację minimalnego stopnia relacji syzygii dla układów krzywych generowanych przez pęki krzywych. Dowodzimy Stwierdzenie 4.13, które niejako podsumowuje te analizy, nie tylko wskazując tę niezredukowaną kwartykę, ale orzekając również, że jest to jedyna niezredukowana krzywa w tym pęku. Eksperymenty polegające na uzupełnianiu układu C_3 o inne niezredukowane krzywe pochodzące z pęku pozwoliły nam postawić Hipotezę 4.1, która w odniesieniu do układu C_3 orzeka, że uzupełnienie tego układu o nowe gładkie krzywe z pęku nie zmienia minimalnego stopnia relacji syzygii dla uzyskanego układu, a sam układ jest wolny. Na koniec, inspirując się Twierdzeniem 4.2 udowodnionym przez Dimcę oraz Măcinic i Pokorę, zbadaliśmy układy powstałe z układów wolnych poprzez usunięcie jednej prostej hiperoskulujacej będącej składową kwartyki K_2, dowodząc, że uzyskane układy są wolne (zobacz Stwierdzenie 4.15). Na końcu znajdują się dwa dodatki, które zawierają kody pozwalające na weryfikację pewnych obliczeniowych stwierdzeń kombinatorycznych.

Rozdział 1

Preliminaria

W niniejszej pracy będzie rozważać układy krzywych gładkich zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Będziemy stosować notację zgodnie z monografiami [7, 26]. Pierwszy rozdział jest podzielony na trzy obszary tematyczne, które odnoszą się do różnych aspektów teorii krzywych.

1.1 Osobliwości krzywych płaskich

W tym rozdziale skupimy się na analitycznych własnościach układów płaskich krzywych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Zauważmy, że założenie rozpatrywania krzywych nad ciałem $\mathbb{C}$ jest istotne z perspektywy ich przecinana się w punktach, tj. korzystamy bezpośrednio z twierdzenia Bézouta [3, Theorem 11.5].

Twierdzenie 1.1 (Bézout)
Niech $C, C' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będą dwiema zredukowanymi nierozkładalnymi krzywymi takimi, że $\deg C = d$ oraz $\deg C' = d'$. Przypuśćmy, że krzywe C i C' nie posiadają wspólnej składowej (dodatniego wymiaru), wówczas

$$C.C' = d \cdot d'.$$

Innymi słowy, krzywe C i C' przecinają się w dokładnie $d \cdot d'$ punktach, licząc je z krotnościami.

Z perspektywy kombinatoryki, najciekawsze problemy dotyczą układów krzywych płaskich genusu 0, tj. układów prostych i gładkich stożkowych, które przecinają się parami transwersalnie. Ta sytuacja prowadzi nas do pojęcia **osobliwości zwyczajnej**.

Definicja 1.1
Niech $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie krzywą zredukowaną. Punkt osobliwy p krzywej C nazywamy k-punktem (bądź też punktem zwyczajnym krotności $k \geqslant 2$), jeżeli ten punkt może być lokalnie opisany przez $\{x^k + y^k = 0\}$.

Przyjęło się, że 2-punkty są nazwane prostymi punktami podwójnymi, bądź też nodami, choć to ostatnie określenie jest niezbyt estetyczną kalką językową z języka angielskiego. W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać pojęcia (lokalnej) liczby Milnora i (lokalnej) liczby Tjuriny.

Definicja 1.2

Mówimy, że punkt p jest izolowaną osobliwością dla wielomianu $f \in \mathbb{C}[x, y]$, jeżeli istnieje taka (mała) liczba rzeczywista ε, że nie ma innych osobliwości w sąsiedztwie punktu p o promieniu ε.

Definicja 1.3

Niech p będzie izolowaną osobliwością wielomianu $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Przypuśćmy, po stosownej zmianie zmiennych, że $p = (0, 0)$. Liczbę

$$\mu_p = \dim_{\mathbb{C}} \Big(\mathbb{C}[x, y]/\langle \partial_x f, \partial_y f \rangle \Big)$$

nazywamy liczbą Milnora f w punkcie p.

Przykład 1.1

Niech $f(x, y) = x^2 + y^2$ oraz $p = (0, 0)$, co oznacza, że rozważamy sytuację prostego punktu podwójnego. Obliczymy liczbę Milnora dla f w p, mianowicie

$$\mu_p = \dim_{\mathbb{C}} \Big(\mathbb{C}[x, y]/\langle x, y \rangle \Big) = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Span}\langle \bar{1} \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

Definicja 1.4

Niech p będzie izolowaną osobliwością wielomianu $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Przypuśćmy, po stosownej zmianie zmiennych, że $p = (0, 0)$. Liczbę

$$\tau_p = \dim_{\mathbb{C}} \Big(\mathbb{C}[x, y]/\langle f, \partial_x f, \partial_y f \rangle \Big)$$

nazywamy liczbą Tjuriny f w punkcie p.

Jeżeli teraz p jest izolowaną osobliwością $f \in \mathbb{C}[x, y]$, to wówczas

$$\tau_p \leqslant \mu_p.$$

Oczywiście bardzo ciekawym problemem jest podanie charakteryzacji tych wszystkich izolowanych osobliwości, dla których $\tau_p = \mu_p$.

Definicja 1.5

Osobliwość p nazywamy quasi-jednorodną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje holomorficzna zamiana zmiennych o tej własności, że wielomian definiujący jest quasi-jednorodny. Ściślej ujmując, wielomian $f(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} x^i y^j$ nazywamy quasi-jednorodnym, jeżeli istnieją liczby wymierne α, β takie, że wielomian

$$\sum_{i,j} c_{i,j} x^{\alpha \cdot i} y^{\beta \cdot j}$$

jest wielomianem jednorodnym.

W kontekście wielomianów quasi-jednorodnych, Reiffen w [29] udowodnił, że jeżeli $f(x,y)$ jest zbieżnym szeregiem potęgowym z izolowaną osobliwością w $p = (0,0)$, to $f(x,y)$ jest zawarty w ideale generowanym przez pochodne cząstkowe $\partial_x f$, $\partial_y f$ wtedy i tylko wtedy, gdy f wielomianem quasi-jednorodnym. Oznacza to, w szczególności, że w przypadku quasi-jednorodnym zachodzi równość $\tau_p = \mu_p$.

Przykład 1.2
Rozważmy $f(x,y) = x^2 + y^2$ i $p = (0,0)$. Wówczas $x^2 + y^2 \in \langle x, y \rangle$, zatem prosty punkt podwójny jest osobliwością quasi-jednorodną. Wobec tego

$$\tau_p = \mu_p = 1.$$

W naszej rozprawie przeważnie będziemy rozważać układy krzywych z osobliwościami quasi-jednorodnymi, a dokładniej układy krzywych, które dopuszczają osobliwości ADE oraz osobliwości eliptyczne X_9. Dla ustalenia notacji oraz dla wygody czytelnika przypominamy lokalne postaci normalne wskazanych powyżej osobliwości:

$$\begin{array}{ll}
A_k \text{ dla } k \geqslant 1 & : \ x^2 + y^{k+1} = 0, \\
D_k \text{ dla } k \geqslant 4 & : \ y^2 x + x^{k-1} = 0, \\
E_6 & : \ x^3 + y^4 = 0, \\
E_7 & : \ x^3 + xy^3 = 0, \\
E_8 & : \ x^3 + y^5 = 0, \\
X_9 & : \ x^4 + y^4 = 0.
\end{array}$$

Należy wspomnieć, że własność quasi-jednorodności wyróżnionych powyżej osobliwości wynika z głębokiego wyniku klasyfikacyjnego Arnolda [1].

Uwaga 1.1
W przypadku układów prostych $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, na mocy znanego w folklorze matematycznym rezultatu, każdy k-punkt jest osobliwością quasi-jednorodną. Fakt ten doprowadził do złudnego przeświadczenia wśród części badaczy, że dowolny k-punkt przecięcia zredukowanej krzywej $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ jest automatycznie osobliwością quasi-jednorodną. Oczywiście to przeświadczenie jest zupełnie nieprawdziwe, o czym mówi następujący przykład, który pochodzi z artykułu [31].

Przykład 1.3
Rozważmy następujący układ stożkowych $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_5\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, gdzie

$$\begin{aligned} C_1 :& \quad (x-3z)^2 + (y-4z)^2 - 25z^2 = 0, \\ C_2 :& \quad (x-4z)^2 + (y-3z)^2 - 25z^2 = 0, \\ C_3 :& \quad (x+3z)^2 + (y-4z)^2 - 25z^2 = 0, \\ C_4 :& \quad (x+4z)^2 + (y-3z)^2 - 25z^2 = 0, \\ C_5 :& \quad (x-5z)^2 + y^2 - 25z^2 = 0. \end{aligned}$$

Prostym rachunkiem można sprawdzić, że punkt $p = (0 : 0 : 1)$ jest osobliwością zwyczajną krotności 5, ale nie jest osobliwością quasi-jednorodną, bowiem

$$15 = \tau_p \neq \mu_p = 16.$$

W kontekście układów krzywych będziemy potrzebować następującą definicję.

Definicja 1.6
Niech $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie zredukowaną krzywą płaską. Całkowitą liczbą Tjuriny krzywej C nazywamy

$$\tau(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \tau_p(C).$$

Całkowitą liczbą Milnora krzywej C nazywamy

$$\mu(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \mu_p(C).$$

Uwaga 1.2
Jeżeli zredukowana krzywa $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ posiada tylko osobliwości quasi-jednorodne, to wówczas

$$\tau(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \tau_p(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \mu_p(C) = \mu(C).$$

1.2 Układy krzywych płaskich w ujęciu homologicznym

Celem niniejszego rozdziału będzie wprowadzenie fundamentalnego pojęcia w kontekście naszej rozprawy, mianowicie krzywej 3-syzygijnej. Pojęcie to ma charakter czysto algebraiczny i nawiązuje ściśle do ważnych pojęć z algebry homologicznej.

Niech $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ będzie pierścieniem wielomianów z gradacją trzech zmiennych x, y, z. Niech $C\colon f = 0$ będzie zredukowaną krzywą stopnia d zawartą w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Oznaczmy przez $J_f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$ ideał jakobianowy stowarzyszony z f, tj. ideał generowany przez pochodne cząstkowe f_x, f_y, f_z wielomianu f. Rozważmy teraz S-moduł z gradacją wszystkich syzygii ideału jakobianowego J_f, mianowicie

$$\mathrm{AR}(f) = \{(a, b, c) \in S^3 : af_x + bf_y + cf_z = 0\}.$$

Definicja 1.7
Minimalnym stopniem nietrywialnych relacji syzygii ideału jakobianowego J_f nazywamy

$$\mathrm{mdr}(f) := \min\{k : \mathrm{AR}(f)_k \neq 0\}.$$

Warto już w tym miejscu zaznaczyć, że minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygii jest kluczowym obiektem naszych badań i będzie odgrywał istotną rolę w naszych rozważaniach. Możemy założyć, że $\mathrm{mdr}(f) \geqslant 1$, bowiem jeżeli $\mathrm{mdr}(f) = 0$, to wówczas C jest pękiem prostych, tj. prostych przechodzących przez dokładnie jeden ustalony punkt.

Dla ustalonej krzywej zredukowanej $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia d zadanej przez $f \in S$ definiujemy stowarzyszoną **algebrę Milnora** $M(f) := S/J_f$.

Definicja 1.8
Zredukowaną krzywą płaską $C\colon f = 0$ stopnia d nazywamy m-syzygijną, jeżeli stowarzyszona algebra Milnora $M(f)$ posiada minimalną rezolwentę wolną z gradacją postaci:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{m-2} S(-e_i) \to \bigoplus_{i=1}^{m} S(1-d-d_i) \to S^3(1-d) \to S \to M(f) \to 0,$$

przy czym $e_1 \leqslant e_2 \leqslant \ldots \leqslant e_{m-2}$ oraz $1 \leqslant d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_m$. Wektor postaci $(d_1, \ldots, d_m)$ nazywamy wykładnikami krzywej m-syzygijnej C.

Uwaga 1.3
W sytuacji z powyższej definicji, minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygji może być zdefiniowany jako $\mathrm{mdr}(f) := d_1$.

Wśród wszystkich krzywych m-syzygijnych możemy wyróżnić trzy fundamentalne klasy, na których skupimy nasze dalsze rozważania.

Definicja 1.9
Krzywa zredukowana $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia d jest **wolna** jeżeli C jest 2-syzygijna, i wtedy $d_1 + d_2 = d - 1$.

Korzystając z wiadomości dotyczącej całkowitej liczby Tjuriny krzywej C, możemy scharakteryzować wolność w języku teorii osobliwości oraz minimalnego stopnia nietrywialnych relacji syzygii Jakobianu [15].

Twierdzenie 1.2 (du Plessis - Wall)
Zredukowana krzywa $C\colon f=0$ *zawarta w* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *stopnia* d *jest wolna wtedy i tylko wtedy, gdy* $d_1=\mathrm{mdr}(f)\leqslant (d-1)/2$ *oraz*

$$d_1^2-d_1(d-1)+(d-1)^2=\tau(C).$$

Pojęcie wolności odgrywa niezwykle istotne znaczenie w kontekście układów prostych na płaszczyźnie zespolonej, a dokładniej w kontekście hipotezy Terao. Przypomnijmy skrótowo tę hipotezę.

Definicja 1.10
Niech $\mathcal{L}\subset\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem d prostych. Grafem Leviego układu $\mathcal{L}$, który będziemy oznaczać przez $G(\mathcal{L})$, nazywamy graf dwudzielny o d wierzchołkach $x_1,\dots,x_d$ odpowiadających prostym w układzie $\mathcal{L}$ oraz o s wierzchołkach $y_1,\dots,y_s$ odpowiadających punktom przecięcia układu, przy czym wierzchołek x_i jest połączony krawędzią z wierzchołkiem y_j, o ile odpowiadająca prosta z układu jest incydentna z odpowiednim punktem przecięcia.

Innymi słowy, graf Leviego koduje informację kombinatoryczną o układzie, a dokładniej strukturę incydencji oraz krotności punktów przecięcia. W latach 80. XX wieku Terao sformułował następującą głęboką hipotezę [26].

Hipoteza 1.1 (Terao o wolności)
Niech $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\subset\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będą dwoma układami d prostych o tej własności, że ich stowarzyszone grafy Leviego $G(\mathcal{L}_1)$, $G(\mathcal{L}_2)$ są izomorficzne. Przypuśćmy, że $\mathcal{L}_1$ jest wolna, wówczas $\mathcal{L}_2$ musi być wolna.

Powyższa hipoteza, niezwykle trudna i intrygująca, została udowodniona w przypadku, gdy liczba prostych $d\leqslant 14$ (zobacz [2]), co pokazuje złożoność problemu. Środowisko badaczy jest mocno podzielone odnośnie tej hipotezy, część badaczy bezwarunkowo wierzy w jej prawdziwość, natomiast spora grupa coraz głośniej podnosi, że hipoteza Terao w swojej całej rozciągłości jest bardzo optymistyczna. W tym dokładnie kontekście Dimca i Sticlaru zdefiniowali bardzo ciekawą klasę krzywych, która jest bliska klasie krzywych wolnych.

Definicja 1.11
Krzywa zredukowana $C\subset\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia d jest **niemal wolna**, jeżeli C jest 3-syzygijna o tej własności, że $d_1+d_2=d$ oraz $d_2=d_3$.

Podobnie jak w przypadku krzywych wolnych, korzystając z wiadomości dotyczącej całkowitej liczby Tjuriny krzywej C, możemy scharakteryzować niemal wolność w języku teorii osobliwości oraz minimalnego stopnia nietrywialnych relacji syzygii Jakobianu [6].

Twierdzenie 1.3 (Dimca)
Zredukowana krzywa $C\colon f=0$ *zawarta w* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *stopnia* d *jest niemal wolna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$d_1^2 - d_1(d-1) + (d-1)^2 = \tau(C) + 1,$$

przy czym $d_1 = \operatorname{mdr}(f)$.

Ostatnia klasa krzywych, którą będziemy badać, pochodzi z pracy [13].

Definicja 1.12
Zredukowana krzywa $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia d jest **plus-jeden generowana** jeżeli C jest 3-syzygijna o tej własności, że $d_1 + d_2 = d$ oraz $d_3 > d_2$.

Podobnie jak w przypadku krzywych wolnych i niemal wolnych, krzywe plus-jeden generowane możemy scharakteryzować w języku minimalnego stopnia nietrywialnych relacji syzygii jakobianowych oraz całkowitej liczby Tjuriny [13].

Twierdzenie 1.4 (Dimca-Sticlaru)
Niech $C\colon f=0$ *będzie zredukowaną* 3*-syzygijną krzywą stopnia* $d \geqslant 3$ *o wykładnikach* $\operatorname{mdr}(f) := (d_1, d_2, d_3)$*. Wówczas* C *jest plus-jeden generowana wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\tau(C) = (d-1)^2 - d_1(d-d_1-1) - (d_3 - d_2 + 1).$$

1.3 Orbifoldowa nierówność Bogomołowa-Miyaoki-Yau

Przypomnijmy, że dla zespolonej gładkiej powierzchni rzutowej X o tej własności, że wymiar Kodairy $\kappa(X) \geqslant 0$, co oznacza, że X nie jest biwymiernie kreślna (ang. birationally ruled), to wówczas

$$K_X^2 \leqslant 3e(X),$$

przy czym K_X oznacza dywizor kanoniczny oraz $e(X)$ oznacza holomorficzną charakterystykę Eulera powierzchni X. Przez blisko 55 lat, czyli od momentu, kiedy powyższa nierówność, dzisiaj znana pod nazwą nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau (bądź skrótowo BMY), została udowodniona przez Miyaokę oraz Yau, nierówność ta uzyskała wiele wariacji oraz wzmocnień. Dla przykładu, Wahl w pracy [33] podał nierówność dla przypadku powierzchni log-terminalnych (X, D). Z naszej perspektywy, będziemy rozpatrywać szczególne uogólnienie nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau na przypadek powierzchni log kanonicznych z wykorzystaniem orbifoldowej charakterystyki Eulera autorstwa Langera [22]. W celu udowodnienia tej nierówności, Langer wykorzystał wiele wysublimowanych metod geometrii algebraicznych, których tutaj nie będziemy omawiać, natomiast naszym celem będzie szczegółowe opisanie tej nierówności w kontekście naszych zastosowań oraz naszego głównego celu badawczego, tj. podanie warunków, dla których możemy ograniczyć słabą kombinatorykę dla ustalonej zredukowanej krzywej. W tym miejscu należy przypomnieć przełomowe wyniki Hirzebrucha, w których to nierówność Bogomołowa-Miyaoki-Yau uzyskała niespodziewane i zaskakujące zastosowanie. Zacznijmy od przypomnienia klasycznego rezultatu dla zespolonych układów prostych. Dla ustalenia uwagi, dla układu d prostych $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ oznaczmy przez n_i liczbę wszystkich punktów i-krotnych układu $\mathcal{L}$, tj. punktów, w których spotka się dokładnie i krzywych z układu $\mathcal{L}$.

Twierdzenie 1.5 (Hirzebruch, [17])
Niech $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem $d \geqslant 4$ prostych o tej własności, że $n_d = n_{d-1} = 0$. Wówczas prawdziwa jest następująca nierówność:

$$n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant d + \sum_{r \geqslant 5}(r-4)n_r.$$

Dowód powyższej nierówności opiera się na bardzo ciekawym pomyśle, dość technicznym, a mianowicie na skonstruowaniu nakrycia abelowego X_n zespolonej płaszczyzny rzutowej rozgałęzionego wzdłuż układu prostych. Przestrzeń nakrywająca jest na ogół osobliwa, jednakże w sposób algorytmiczny możemy znaleźć minimalne rozwiązanie osobliwości Y, a przy pewnych naturalnych założeniach odnośnie liczby prostych w układzie oraz ograniczeniu na maksymalną krotność układu, uzyskana powierzchnia ma nieujemny wymiar Kodairy. Co więcej, możemy algorytmicznie wyznaczyć holomorficzną charakterystykę Eulera oraz samoprzecięcia dywizora kanonicznego powierzchni Y, a liczby te wyrażają się w sposób jawny w języku liczb n_i oraz liczby prostych naszego układu. W ostatnim kroku aplikujemy uzyskane wyniki do nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau, co pozwala nam uzyskać przedstawioną powyżej nierówność Hirzebrucha.

Przedstawiona konstrukcja ma pewne wady, mianowicie jest bardzo techniczna i żmudna rachunkowo, oraz nasze rozważania ograniczają się głównie do przypadku osobliwości zwyczajnych. Stosując techniki Langera, możemy rozszerzyć nasze rozważania na klasę krzywych z osobliwościami zwyczajnymi oraz na dowolne osobliwości ADE krzywych. Punktem startowym jest zdefiniowanie lokalnych orbifoldowych liczb Eulera. Przypomnijmy, że jeżeli X jest rozmaitością quasi-rzutową, która posiada tylko izolowane osobliwości ilorazowe, to wówczas orbifoldowa liczba Eulera X jest zdefiniowana jako

$$e_{\mathrm{orb}}(X) = e_{\mathrm{top}}(X) - \sum_{x \in \mathrm{Sing}(X)} \left(1 - \frac{1}{r(x)}\right),$$

przy czym $r(x)$ jest rzędem lokalnej grupy podstawowej wokół punktu x, a $e_{\mathrm{top}}(X)$ oznacza topologiczną charakterystykę Eulera. Głównym pomysłem Langera jest zdefiniowanie orbifoldowych liczb Eulera w przypadku powierzchni log kanonicznych będących parami

(X, D), przy czym X to normalna powierzchnia oraz D to $\mathbb{Q}$-dywizor. Globalna orbifoldowa liczba Eulera $e_{\mathrm{orb}}(X, D)$ dla pary $(X, D = \sum_i a_i D_i)$ jest zdefiniowana przy użyciu lokalnych liczb orbifoldowych osobliwości, a mianowicie

$$e_{\mathrm{orb}}(X, D) = e_{\mathrm{top}}(X) - \sum_i a_i e_{\mathrm{top}}(D_i \setminus \mathrm{Sing}(X, D)) + \sum_{x \in \mathrm{Sing}(X)} (e_{\mathrm{orb}}(x; X, D) - 1).$$

Warto już tutaj podkreślić, że lokalne orbifoldowe liczby Eulera są trudne do wyznaczenia, jednakże w kontekście naszych badań, tj. w przypadku osobliwości ADE oraz zwyczajnych punktów osobliwych krzywych liczby te są dobrze znane. W celu wyrobienia własnej intuicji odnośnie lokalnych orbifoldowych liczb Eulera przytoczmy ich najważniejsze własności:

1. Jeżeli (X, x) nie jest osobliwością ilorazową oraz (X, D) jest log kanoniczna w punkcie x, to wówczas $e_{\mathrm{orb}}(x; X, D) = 0$.

2. Jeżeli $(\mathbb{C}^2, D)$ jest log kanoniczna w 0 oraz $\mathrm{mult}_0(D)$ oznacza krotności D w punkcie 0, tj. suma krotności nierozkładalnych składowych D_i liczonych z odpowiednimi krotnościami, to wówczas
$$e_{\mathrm{orb}}(0; \mathbb{C}^2, D) \leqslant \left(1 - \frac{\mathrm{mult}_0(D)}{2}\right)^2.$$

3. Dla par log kanonicznych (X, D) zachodzi $e_{\mathrm{orb}}(x; X, D) \leqslant 1$.

Sformułujmy teraz nierówność orbifoldową Bogomołowa-Miyaoki-Yau, z której będziemy korzystać w niniejszej rozprawie.

Twierdzenie 1.6 (Langer)
Niech C będzie zredukowaną krzywą stopnia n zawartą w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Załóżmy, że para $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \alpha C)$ jest efektywna i log kanoniczna dla odpowiednio dobranej stałej $\alpha \in [0, 1]$, wówczas

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} 3\Big(\alpha(\mu_p - 1) + 1 - e_{orb}(p; \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \alpha C)\Big) \leqslant (3\alpha - \alpha^2)n^2 - 3\alpha n,$$

przy czym μ_p oznacza lokalną liczbę Milnora osobliwości $p \in C$ oraz e_{orb} oznacza lokalną orbifoldową liczbę Eulera osobliwości $p \in C$.

Kolejno, naszym celem jest przedstawienie, zbiorczo, lokalnych orbifoldowych liczb Eulera dla osobliwości, które będą dopuszczać analizowane przez nas układy krzywych, a po szczegóły odsyłamy do [4].

Typ osobliwości	μ_p	$e_{orb}(p, \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \alpha C)$	α
A_1	1	$(1-\alpha)^2$	$0 < \alpha \leqslant 1$
A_3	3	$\frac{(3-4\alpha)^2}{8}$	$1/4 \leqslant \alpha \leqslant 3/4$
D_4	4	$\frac{(2-3\alpha)^2}{4}$	$0 < \alpha \leqslant 2/3$
A_5	5	$\frac{(4-6\alpha)^2}{12}$	$1/3 \leqslant \alpha \leqslant 2/3$
D_6	6	$\frac{(3-5\alpha)^2}{8}$	$1/3 < \alpha \leqslant 3/5$
A_7	7	$\frac{(5-8\alpha)^2}{16}$	$3/8 \leqslant \alpha \leqslant 5/8$
X_9	9	$\leqslant (1-2\alpha)^2$	$0 < \alpha \leqslant 1/2$

Tabela 1.1: Lokalne orbifoldowe liczby Eulera dla pewnych wybranych osobliwości krzywych.

1.4 Obliczenia symboliczne

W badaniach odnoszących się do wolności i niemal wolności krzywych istnieje konieczność wykorzystywania obliczeń symbolicznych, które można przeprowadzić w wielu programach. W naszym przypadku wykorzystujemy obliczenia w programie `SINGULAR` [5], który jest podstawowym narzędziem, jeżeli idzie o badania związane z teorią osobliwości. Program `SINGULAR` najczęściej wykorzystujemy do poszukiwania minimalnego stopnia relacji syzygii, czy też wskazania minimalnej rezolwenty wolnej dla algebry Milnora stowarzyszonej z zadaną krzywą płaską. Poniższy przykładowy skrypt pokazuje, w jaki sposób możemy uzyskać niezbędne dla nas informacje.

```
ring R = 0, (x,y,z), (c,dp);
poly f = x*y*z*(x+y+z);
ideal I = jacob(f);
syz(I);
resolution r = mres(I,0);
print(betti(r), "betti");
```

W powyższym przykładzie mamy układ 4 prostych, dla którego program znajduje generatory stowarzyszonego modułu syzygii $\mathrm{AR}(f)$ oraz dla wyznaczonej minimalnej rezolwenty algebry Milnora podaje liczby Bettiego. Z perspektywy zastosowań szczegółowszą informację odnośnie własności homologicznych krzywych podaje nam właśnie tabela liczb Bettiego.

Rozdział 2

Układy stożkowych z osobliwościami A_5 i A_7

2.1 Oszacowania kombinatoryczne

Niniejszy rozdział jest oparty na artykule [32].

Skupimy się na układach krzywych, które składają się tylko z gładkich stożkowych i dopuszczają pewnie wybrane przez nas ADE osobliwości. Naszą główną motywacją jest klasyczny rezultat Miyaoki z pracy [25], który pozwala oszacować liczbę osobliwości A_3 dla układów, które dopuszczają tylko osobliwości A_1 i A_3. Dla ułatwienia zapisu, niech n_2 oznacza liczbę osobliwości A_1 oraz niech t_3 oznacza liczbę osobliwości A_3.

Twierdzenie 2.1 (Miyaoka)
Niech $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem $k \geqslant 3$ gładkich stożkowych, które dopuszczają tylko osobliwości A_1 oraz A_3. Wówczas

$$t_3 \leqslant \frac{4}{9}k^2 + \frac{4}{3}k.$$

Oczywiście bardzo naturalnym problem jest scharakteryzowanie tych wszystkich układów stożkowych, dla których powyższe ograniczenie górne na liczbę osobliwości A_3 jest osiągnięte. Problemem tym zajmował się w 2000 roku Megyesi, który udowodnił, że powyższe ograniczenie górne jest osiągane dla $k \leqslant 5$. Wiele lat później, wykorzystując nierówność Bogomołowa-Miyaoki-Yau autorstwa Langera, w [11] Dimca, Janasz i Pokora udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 (Dimca-Janasz-Pokora)
Niech $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem $k \geqslant 6$ gładkich stożkowych na płaszczyźnie, które dopuszczają tylko osobliwości A_1 oraz A_3. Wówczas

$$t_3 \leqslant \frac{1}{3}k^2 + 3k.$$

W szczególności powyższe ograniczenie górne jest lepsze od oszacowania Miyaoki, jeśli tylko $k \geqslant 16$.

W kontekście powyższych rozważań, naszym celem w niniejszym rozdziale jest podanie oszacowań na liczbę punktów A_5 i A_7 dla układów gładkich stożkowych. Zaczynamy od informacji wstępnych, a potem bezpośrednio przejdziemy do omówienia naszych głównych wyników w tym rozdziale.

Niech $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem $k \geqslant 2$ gładkich stożkowych. Zakładamy, że układ $\mathcal{C}$ dopuszcza **tylko** n_2 osobliwości A_1, t_3 osobliwości A_3, n_3 osobliwości D_4, t_5 osobliwości A_5, oraz t_7 osobliwości A_7. Innymi słowy, powyższa lista ustala dopuszczalne typy osobliwości, jakie nasze układy stożkowe mogą posiadać. Zauważmy, że w takim razie $\mathcal{C}$ dopuszcza tylko osobliwości quasi-jednorodne. Dla tak zdefiniowanych układów definiujemy ich słabą kombinatorykę, tj. wektor postaci

$$(k; n_2, t_3, n_3, t_5, t_7) \in \mathbb{Z}^6_{\geqslant 0}.$$

Korzystając z zacytowanego twierdzenia Bézouta, możemy wyznaczyć wzór na naiwne kombinatoryczne zliczanie, mianowicie

$$4 \cdot \binom{k}{2} = n_2 + 2t_3 + 3n_3 + 3t_5 + 4t_7. \tag{2.1}$$

Dowód. Lewa strona to zastosowane wprost twierdzenie Bézouta dla parami przecinających się stożkowych, a prawa strona to nic innego jak zliczanie indeksów przecięcia dla odpowiednich typów osobliwości. ■

Głównym wynikiem tego rozdziału jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3
Niech $\mathcal{C}$ *będzie układem* $k \geqslant 3$ *gładkich stożkowych, który dopuszcza* n_2 *osobliwości* A_1, t_3 *osobliwości* A_3, n_3 *osobliwości* D_4, t_5 *osobliwości* A_5, *oraz* t_7 *osobliwości* A_7. *Wówczas zachodzi następująca nierówność typu Hirzebrucha:*

$$560k + 100n_2 + 75n_3 \geqslant 608t_7 + 404t_5 + 184t_3. \tag{2.2}$$

Dowód. Niech $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie naszym układem stożkowych. Oznaczmy przez $C = C_1 + \ldots + C_k$ stowarzyszony dywizor. Naszym celem będzie zastosowanie Twierdzenia 1.6 dla pary $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \alpha C)$, zatem naszym pierwszym celem będzie wskazanie dopuszczalnych wartości parametru α. Pierwszym nałożonym ograniczeniem jest efektywność pary, zatem musimy założyć, że $\alpha \geqslant \frac{3}{2k}$. Z drugiej strony, nasza para musi być log kanoniczna, a to sprowadza się do przeanalizowania górnych ograniczeń na parametr α według Tabeli 1.1, a zatem $\alpha \in [3/8,\, 5/8]$. Wobec powyższego zauważmy, że

$$\alpha \in \Big[\max\{3/2k,\, 3/8\}, 5/8\Big].$$

Zauważmy, że powyższy warunek jest niepusty w przypadku, gdy tylko $k \geqslant 3$, wobec czego możemy wybrać parametr α z przedziału $[1/2, 5/8]$. Od tego momentu, niech

$$\alpha = \frac{5}{8}.$$

Stosujemy bezpośrednio nierówność z Twierdzenia 1.6. Lewa strona nierówności ma następującą postać:

$$3n_2\left(\frac{5}{8}(1-1)+1-\frac{9}{64}\right)+3t_3\left(\frac{5}{8}(3-1)+1-\frac{1}{32}\right)+3n_3\left(\frac{5}{8}(4-1)+1-\frac{1}{256}\right)+$$
$$3t_5\left(\frac{5}{8}(5-1)+1-\frac{1}{192}\right)+3t_7\left(\frac{5}{8}(7-1)+1-0\right)$$
$$=\frac{165}{64}n_2+\frac{213}{32}t_3+\frac{2205}{256}n_3+\frac{671}{64}t_5+\frac{57}{4}t_7.$$

Wobec powyższego, uzyskujemy następującą nierówność:

$$\frac{165}{64}n_2+\frac{213}{32}t_3+\frac{2205}{256}n_3+\frac{671}{64}t_5+\frac{57}{4}t_7 \leqslant \left(3\cdot\frac{5}{8}-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right)d^2-3\cdot\frac{5}{8}d=\frac{95}{64}d^2-\frac{15}{8}d$$

Ponieważ $d = 2k$, zatem

$$\frac{165}{64}n_2+\frac{213}{32}t_3+\frac{2205}{256}n_3+\frac{671}{64}t_5+\frac{57}{4}t_7 \leqslant \frac{95}{32}(2k^2)-\frac{15}{4}k.$$

Naszym celem będzie teraz zastosowanie formuły na zliczenie kombinatoryczne (2.1), mianowicie

$$2k^2 = n_2 + 2t_3 + 3n_3 + 3t_5 + 4t_7 + 2k.$$

Po zastosowaniu powyższej równości uzyskujemy

$$\frac{165}{64}n_2+\frac{213}{32}t_3+\frac{2205}{256}n_3+\frac{671}{64}t_5+\frac{57}{4}t_7 \leqslant \frac{95}{32}\Big(n_2+2t_3+3n_3+3t_5+4t_7+2k\Big)-\frac{15}{4}k,$$

a po prostych przekształceniach uzyskujemy ostatecznie

$$560k + 100n_2 + 75n_3 \geqslant 608t_7 + 404t_5 + 184t_3,$$

co kończy nasz dowód. ■

Przechodzimy teraz do zastosowań udowodnionej przez nas nierówności. Na samym początku wspominaliśmy, że naszym głównym celem będzie podanie efektywnych szacowań na liczbę osobliwości A_5 i A_7 dla układów stożkowych.

Wniosek 2.1
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem $k \geqslant 3$ gładkich stożkowych, który dopuszcza osobliwości A_1, D_4, A_5 i A_7. Wówczas prawdziwe są następujące oszacowania górne:

$$t_5 \leqslant \frac{25}{88}k^2 + \frac{45}{88}k,$$

$$t_7 \leqslant \frac{25}{126}k^2 + \frac{5}{14}k.$$

Dowód. Zaczniemy od wyznaczenia oszacowania dla t_5. Korzystając ze zliczania (2.1), mamy

$$2k^2 - 2k \geqslant n_2 + 3n_3 + 3t_5 \geqslant n_2 + \frac{3}{4}n_3 + 3t_5,$$

wobec czego otrzymujemy

$$560k + 100(2k^2 - 2k - 3t_5) \geqslant 560k + 100\left(n_2 + \frac{3}{4}n_3\right) \geqslant 404t_5,$$

a zatem

$$t_5 \leqslant \frac{200}{704}k^2 + \frac{360}{704}k = \frac{25}{88}k^2 + \frac{45}{88}k.$$

To kończy dowód w przypadku osobliwości A_5. W analogiczny sposób wskażemy ograniczenie górne na t_7. Korzystając ponownie ze zliczania kombinatorycznego (2.1), mamy

$$2k^2 - 2k \geqslant n_2 + \frac{3}{4}n_3 + 4t_7,$$

co daje nam ostatecznie

$$t_7 \leqslant \frac{200}{1008}k^2 + \frac{360}{1008}k = \frac{25}{126}k^2 + \frac{5}{14}k.$$

■

2.2 Przykłady

Przejdźmy zatem do przykładów, które dla małych wartości k będą maksymalizowały liczbę osobliwości A_5 i A_7. Korzystając z naiwnego kombinatorycznego zliczania dla układów gładkich stożkowych, możemy wskazać oszacowanie na liczbę osobliwości A_7, mianowicie

$$t_7 \leqslant \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Łatwym rachunkiem możemy sprawdzić, że nasze ograniczenie z Wniosku 2.1 jest lepsze od naiwnego, o ile $k \geqslant 3$. W przypadku granicznym, czyli $k = 3$, nasze ograniczenie daje nam oszacowanie

$$t_7 \leqslant \frac{20}{7},$$

a zatem $t_7 \leqslant 2$. Zauważmy, że powyższe ograniczenie jest osiągalne, o czym mówi nam następujący przykład.

Przykład 2.1
Rozważmy układ stożkowych $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ dany przez następujące równanie

$$Q(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z^2)(2x^2 + y^2 + 2xz)(2x^2 + y^2 - 2xz) = 0.$$

Układ ten został skonstruowany przez Perssona w [27]. Można zobaczyć, że układ ten zadaje dokładnie dwie osobliwości A_7, zatem maksymalizuje nasze ograniczenie górne w przypadku $k = 3$. Dokładniejsza analiza pokazuje, że układ ten zadaje również jedną osobliwość A_3 oraz dwie osobliwości A_1.

Tak jak w przypadku osobliwości A_7, korzystając z naiwnego zliczania kombinatorycznego możemy pokazać, że dla układów stożkowych z osobliwościami A_5 mamy

$$t_5 \leqslant \frac{2k(k-1)}{3}.$$

Prostym rachunkiem można wykazać, że oszacowanie górne na liczbę osobliwości A_5 z Wniosku 2.1 jest lepsze od naiwnego, o ile tylko $k \geqslant 4$, a dla $k = 3$ daje dokładnie taki sam wynik. Zauważmy, że dla $k = 3$ mamy $t_5 \leqslant 4$. W kontekście tego problemu możemy udowodnić następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.1
Nie istnieje zredukowana krzywa $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia $d = 6$ posiadająca tylko ADE *osobliwości o tej własności, że $t_5 = 4$.*

DOWÓD. Na podstawie pracy [12] wiemy, że jeżeli $C\colon f = 0$ jest zredukowaną krzywą stopnia $d = 2k$ dla $k \geqslant 2$, która posiada tylko ADE osobliwości, to wówczas prawdziwa jest następująca nierówność:

$$\mu(C) \leqslant 3k(k-1) + 1. \tag{2.3}$$

Zauważmy, że dla $k = 3$ mamy

$$\mu(C) \leqslant 19.$$

Ponieważ lokalna liczba Milnora osobliwości A_5 wynosi 5, nie istnieje krzywa stopnia 6, która posiada dokładnie 4 osobliwości A_5, co kończy dowód. ■

Wobec tego dla $k = 3$ nasze oszacowanie górne wynosi $t_5 \leqslant 3$, które jest osiągalne, jak wynika z poniższego przykładu.

Przykład 2.2
Rozważmy następujący układ stożkowych $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dany przez równania.

$$\begin{aligned} C_1 &: \ -3x^2 + xy + yz + zx = 0, \\ C_2 &: \ -3y^2 + xy + yz + zx = 0, \\ C_3 &: \ -3z^2 + xy + yz + zx = 0. \end{aligned}$$

Łatwym rachunkiem można pokazać, że $\mathcal{C}$ posiada dokładnie 3 osobliwości A_5 oraz dokładnie jeden prosty punkt potrójny, czyli osobliwość D_4, wobec czego oszacowanie górne na t_5 dla $k = 3$ jest osiągalne.

W kolejnym kroku przejdziemy do zastosowania naszej nierówności w kontekście wolności układów gładkich stożkowych. Przypomnijmy następujący wynik klasyfikacyjny z [28].

Twierdzenie 2.4 (Pokora)
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem $k \geqslant 2$ gładkich stożkowych, który dopuszcza n_2 prostych punktów podwójnych, t_3 osobliwości A_3, n_3 osobliwości D_4, t_5 osobliwości A_5, oraz t_7 osobliwości A_7. Przypuśćmy, że $\mathcal{C}$ jest wolna, wówczas $k \leqslant 4$.

Powyższe twierdzenie klasyfikacyjne (względem stopnia układu) pozwala nam podać częściową klasyfikację takich układów.

- ($k = 2$) Zauważmy, że dla dwóch stożkowych ze wskazanymi powyżej osobliwościami maksymalna liczba Tjuriny wynosi $\tau(\mathcal{C}) = 7$, a wartość ta może być zrealizowana w dokładnie jednym przypadku, tj. gdy $\mathrm{mdr}(\mathcal{C}) = 1$ oraz stożkowe przecinają się w dokładnie jednym punkcie zadając osobliwość A_7. Okazuje się, że istnieje 1-parametrowa rodzina posiadająca dokładnie takie własności, mianowicie

$$\begin{cases} x^2 - yz = 0, \\ x^2 + c \cdot z^2 - yz = 0 \quad \text{dla } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

- ($k = 3$) W tym przypadku znamy dokładnie dwa układy wolne, mianowicie układ Perssona z Przykładu 2.1 oraz układ z Przykładu 2.2. W obu przypadkach całkowita liczba Tjuriny wynosi $\tau(\mathcal{C}) = 19$ oraz minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygji $d_1 = \mathrm{mdr}(\mathcal{C}) = 2$, zatem korzystając z Twierdzenia 1.2, mamy

$$19 = d_1^2 - d_1(2k-1) + (2k-1)^2 = \tau(\mathcal{C}),$$

a zatem układy te są wolne.

W przypadku $k = 4$ nie jest znany w literaturze **żadny** przykład wolnego układu stożkowych z zadanymi powyżej osobliwościami! Spróbujmy teraz ustalić warunki dla geometrycznej realizowalności takiego układu. Jeżeli $\mathcal{C}$ jest układem $k = 4$ stożkowych z osobliwościami A_1, A_3, D_4, A_5 oraz A_7, który dodatkowo jest wolny, to wówczas spełnione są następujące równości:

$$(\triangle)\ :\ \begin{cases} n_2 + 3t_3 + 4n_3 + 5t_5 + 7t_7 = \tau(\mathcal{C}) = 37, \\ n_2 + 2t_3 + 3n_3 + 3t_5 + 4t_7 = 4 \cdot \binom{k}{2} = 24. \end{cases}$$

Zauważmy, że pierwsza równość mówi nam, że dla $k = 4$ maksymalna liczba Tjuriny wynosi 37, co wynika wprost z Twierdzenia 1.2, natomiast druga równość to znane nam naiwne zliczanie kombinatoryczne przecięć stożkowych. Rozwiązując układ $(\triangle)$ w liczbach całkowitych nieujemnych (zobacz **Dodatek A**, gdzie znajduje się nasz kod napisany w języku `Python`) uzyskujemy następujące 50 rozwiązań – w celu skrócenia zapisu pomijamy k:

$$\begin{aligned}(\star) : (n_2, t_3, n_3, t_5, t_7) \in \Big\{ &(0,0,3,5,0), (0,0,4,0,3), (0,1,3,3,1), (0,2,3,1,2), (0,3,2,4,0), (0,4,2,2,1), \\ &(0,5,2,0,2), (0,6,1,3,0), (0,7,1,1,1), (0,9,0,2,0), (0,10,0,0,1), (1,0,3,2,2), (1,1,2,5,0), (1,1,3,0,3), \\ &(1,2,2,3,1), (1,3,2,1,2), (1,4,1,4,0), (1,5,1,2,1), (1,6,1,0,2), (1,7,0,3,0), (1,8,0,1,1), (2,0,2,4,1), \\ &(2,1,2,2,2), (2,2,1,5,0), (2,2,2,0,3), (2,3,1,3,1), (2,4,1,1,2), (2,5,0,4,0), (2,6,0,2,1), (2,7,0,0,2), \\ &(3,0,1,6,0), (3,0,2,1,3), (3,1,1,4,1), (3,2,1,2,2), (3,3,0,5,0), (3,3,1,0,3), (3,4,0,3,1), (3,5,0,1,2), \\ &(4,0,1,3,2), (4,1,0,6,0), (4,1,1,1,3), (4,2,0,4,1), (4,3,0,2,2), (4,4,0,0,3), (5,0,0,5,1), (5,0,1,0,4), \\ &(5,1,0,3,2), (5,2,0,1,3), (6,0,0,2,3), (6,1,0,0,4) \Big\}.\end{aligned}$$

Wobec tego naiwne zliczanie kombinatoryczne i warunek wolności prowadzi nas do 50 możliwych różnych słabych kombinatoryk dla układów 4 stożkowych. Korzystając z naszej nierówności z Twierdzenia 2.3, dowodzimy następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.2
Dla układów $k = 4$ gładkich stożkowych $\mathcal{C}$ następujące słabe kombinatoryki nie są realizowane geometrycznie na zespolonej płaszczyźnie rzutowej:

$$\begin{aligned}(n_2, t_3, n_3, t_5, t_7) \in \{&(0,6,1,3,0), (0,9,0,2,0), (0,10,0,0,1), (1,7,0,3,0), (1,8,0,1,1), \\ &(2,5,0,4,0), (2,6,0,2,1), (2,7,0,0,2), (3,3,0,5,0), (3,4,0,3,1)\}.\end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy podstawić wartości wskazanych powyżej słabych kombinatoryk do naszej nierówności z Twierdzenia 2.3 – w każdym ze wskazanych przypadków uzyskujemy sprzeczność. ■

Wobec powyższego stwierdzenia pozostało nam dokładnie 40 słabych kombinatoryk do zbadania. Problem ten jest jednak niezwykle trudny i na ten moment nie potrafimy pokazać, że jakakolwiek kombinatoryka z listy ($\star$) jest realizowalna geometrycznie na zespolonej płaszczyźnie rzutowej.

Rozdział 3

Układy prostych i gładkich kwartyk z wybranymi osobliwościami quasi-jednorodnymi

W tym rozdziale skupimy się na układach krzywych składających się z gładkich kwartyk i prostych, ze szczególnym uwzględnieniem prostych bistycznych. Do tej pory, patrząc na literaturę przedmiotu, badania nad wolnością skupiały się na przypadku układów prostych bądź na przypadku układów prostych i stożkowych. Bardzo mało wiemy o wolności układów, w których składowe nierozkładalne posiadają dodatni genus, w szczególności mamy mało przykładów wolnych układów takich krzywych.

Naszym celem będzie omówienie własności kombinatorycznych układów prostych i gładkich kwartyk, które dopuszczają pewne naturalnie wybrane ADE osobliwości, a potem skupimy się na kombinatoryce układów kwartyk i bistyczych. Jak wiemy, każda dostatecznie ogólna nierozkładalna kwartyka posiada dokładnie 28 prostych bistycznych. Przeglądając literaturę, co spowodowało u nas niemałe zaskoczenie, bardzo mało znaleźliśmy o kombinatoryce układów 28 bistycznych do ustalonej gładkiej kwartyki $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Stanowi to dla nas motywację do podania charakteryzacji słabych kombinatoryk układów 28 bistycznych, ze szczególnym uwzględnieniem podania oszacowania dolnego na liczbę poczwórnych punktów przecięcia dla pewnej klasy gładkich kwartyk, które posiadają *dużą* grupę automorfizmów. W ostatniej części tego rozdziału, korzystając z uzyskanych przez nas danych kombinatorycznych dotyczących układów prostych bistycznych, podamy konstrukcje wolnych, niemal wolnych, oraz plus-jeden generowanych układów składających się z gładkich kwartyk i bistycznych. Niniejszy rozdział jest oparty na artykule [19].

3.1 Ograniczenia dla słabych kombinatoryk układów gładkich kwartyk i prostych

Nasze rozważania rozpoczynamy od ogólnego wyniku pozwalającego ograniczyć słabe kombinatoryki dla układów kwartyk i prostych. W poniższym twierdzeniu zakładamy, że nasze układy dopuszczają pewne określone osobliwości quasi-jednorodne, które wyszczególniamy w wypowiedzi naszego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1
Niech $\mathcal{QL} = \{\ell_1, \ldots, \ell_d, Q_1, \ldots, Q_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie układem składającym się z $d \geqslant 1$ prostych oraz $k \geqslant 1$ gładkich kwartyk. Niech $4k + d \geqslant 6$. Przypuśćmy, że $\mathcal{QL}$ dopuszcza n_2 prostych punktów podwójnych A_1, t_3 osobliwości A_3, t_5 osobliwości A_5, d_6 osobliwości D_6, t_7 osobliwości A_7, n_3 osobliwości D_4 oraz n_4 osobliwości X_9. Wówczas zachodzi następująca nierówność:

$$56k + n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant d + \frac{13}{8}d_6 + \frac{5}{2}t_3 + 5t_5 + \frac{29}{4}t_7.$$

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w przypadku twierdzenia odnośnie układów stożkowych z poprzedniego rozdziału, zatem skupimy się na kluczowym momentach, pomijając przy tym pewne żmudne obliczenia.

Niech $D = \ell_1 + \ldots + \ell_d + Q_1 + \ldots + Q_k$ będzie stowarzyszonym dywizorem do $\mathcal{QL}$ stopnia $\deg(\mathcal{QL}) := m = 4k + d$, przy czym $k \geqslant 1$ oraz $d \geqslant 1$. Będziemy pracować z parą $\left(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \frac{1}{2}D\right)$, która jest log kanoniczna oraz efektywna wobec założenia, że $4k + d \geqslant 6$. Zastosujemy ponownie nierówność BMY w sensie Langera [22], mianowicie

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})} 3\left(\frac{1}{2}\left(\mu_p - 1\right) + 1 - e_{orb}\left(p, \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \frac{1}{2}D\right)\right) \leqslant \frac{5}{4}m^2 - \frac{3}{2}m. \tag{3.1}$$

Po dosyć żmudnych i elementarnych rachunkach możemy zauważyć, że lewa strona strona nierówności jest ograniczona od dołu przez następujące wyrażenie

$$\frac{9}{4}n_2 + \frac{45}{8}t_3 + \frac{117}{16}n_3 + \frac{35}{4}t_5 + \frac{333}{32}d_6 + \frac{189}{16}t_7 + 15n_4.$$

Popatrzmy teraz na prawą stronę nierówności (3.1).

Przypomnijmy, że dla naszego układu krzywych $\mathcal{QL}$ spełnione jest następujące zliczanie kombinatoryczne

$$16\binom{k}{2} + 4kd + \binom{d}{2} = n_2 + 2t_3 + 3n_3 + 3t_5 + 4d_6 + 4t_7 + 6n_4, \tag{3.2}$$

a wynika ono wprost z klasycznego twierdzenia Bézouta. Korzystając z powyższego zliczania, uzyskujemy

$$5m^2 - 6m = 5 \cdot (16k + d + 2n_2 + 4t_3 + 6n_3 + 6t_5 + 8d_6 + 8t_7 + 12n_4) - 6(4k + d).$$

Łącząc powyższe rachunki przed podstawienie do nierówności (3.1), uzyskujemy ostatecznie

$$56k + n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant d + \frac{13}{8}d_6 + \frac{5}{2}t_3 + 5t_5 + \frac{29}{4}t_7, \tag{3.3}$$

co kończy dowód. ■

3.2 Układy prostych bistycznych i stowarzyszonych gładkich kwartyk

Nierówność z powyższego twierdzenia może zostać wykorzystana do badania układów składających się z prostych bistycznych oraz gładkiej kwartyki. Jest to bardzo interesujący i klasyczny temat badawczy, który nadal wydaje się niewystarczająco zbadany, co za chwilę będzie przedstawione przez odpowiednie wyniki.

Zaczynamy od przypomnienia pewnych podstawowych rezultatów odnośnie punktów przegięcia krzywych zredukowanych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Niech $C\colon f = 0$ będzie zredukowaną stopnia $d \geqslant 3$ zawartą w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ daną przez $f \in S = \mathbb{C}[x, y, z]$. Rozważmy teraz hesjan $H(f)$ wielomianu f, który jest zdefiniowany jako wyznacznik macierzy hesjanu f, i oznaczmy przez H_C stowarzyszoną krzywą hesjanową do krzywej C. Oznaczmy kolejno przez $X_C = C \cap H_C$. Wiemy, że X_C składa się dokładnie z punktów przegięcia krzywej C, a zbiór tych punktów będziemy oznaczać przez I_C, oraz z punktów osobliwych krzywej C. Przypomnijmy, że jeżeli $p \in C$ jest gładkim punktem na tej krzywej oraz T_pC oznacza prostą rzutową styczną do C w punkcie p, to wówczas **rzędem styczności** punktu p nazywamy

$$\iota_p(C) = (C, T_p(C))_p - 2,$$

przy czym $(C, T_p(C))_p$ oznacza indeks przecięcia krzywych C i T_pC we wspólnym punkcie p.

Definicja 3.1
Punkt p zredukowanej i nierozkładalnej krzywej $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ jest punktem przegięcia, tj. $p \in I_C$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\iota_p(C) > 0$.

Przypomnijmy następującą charakteryzację liczby $\iota_p(C)$ w przypadku $p \in I_C$ [20, Theorem 9.7 and Corollary 9.10].

Stwierdzenie 3.1
Dla zredukowanej i nierozkładalnej krzywej $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia $d \geqslant 3$ oraz dowolnego gładkiego punktu $p \in C$ mamy

$$\iota_p(C) = (C, H_C)_p.$$

Przypomnijmy również, że $\iota_p(C) \leqslant d-2$, poza przypadkiem w którym p leży na prostej $L = T_pC$ będącej składową nierozkładalną krzywej C, i wtedy też mamy $\iota_p(C) = \infty$.

Przejdźmy teraz do sytuacji **gładkich kwartyk** C zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. W tej klasie krzywych możemy mieć punkt przegięcia $p \in I_C$, dla którego $\iota_p(C) = 1$, i wtedy mówimy, że p jest punktem przegięcia rzędu 1, oraz możemy znaleźć się w sytuacji, w której dla punktu $q \in I_C$ mamy $\iota_q(C) = 2$. W tym drugim przypadku mówimy, że punkt q jest punktem przegięcia rzędu 2. Korzystając z klasycznego twierdzenia Bézouta zastosowanego do krzywych C oraz H_C oraz Stwierdzenia 3.1, uzyskujemy następujące oszacowanie.

Stwierdzenie 3.2
Dla gładkiej kwartyki $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, oznaczmy przez $\mathrm{hyp}(C)$ *zbiór wszystkich punktów przegięcia rzędu* 2. *Wówczas*

$$\#\mathrm{hyp}(C) \leqslant 12.$$

Nasze oznaczenie zbioru punktów przegięcia rzędu 2 wywodzi się bezpośrednio z nomenklatury angielskiej, mianowicie takie punkty przegięcia są nazywane jako **hyperflexes**.

Przechodzimy teraz do fundamentalnej definicji niezbędnej do dalszych rozważań w tej części rozdziału.

Definicja 3.2
Niech C będzie zredukowaną i nierozkładalną krzywą zawartą w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Prostą L nazywamy **bistyczną** do krzywej C, jeżeli jest styczna w dwu punktach $p, q \in C$.

Zauważmy, korzystając wprost z klasycznego twierdzenia Bézouta, że krzywa $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o tej własności, że posiada prostą bistyczną L, musi mieć stopień przynajmniej 4. Powyższa definicja delikatnie odbiega od tej klasycznej definicji z geometrii wywodzącej się z XIX wieku, mianowicie **nigdzie nie zakładamy, że punkty p, q w definicji prostej bistycznej są różne!** Przypomnijmy również, że każda gładka kwartyka w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ posiada dokładnie 28 bistycznych, a wynik ten przypisuje się Plückerowi[1].

Teraz możemy przejść do najciekawszego momentu tej części rozdziału, a mianowicie do klasyfikacji gładkich kwartyk ze względu na typy prostych bistycznych, jakie dopuszczają. W przypadku, gdy kwartyka dopuszcza prostą bistyczną o tej własności, że $p = q$, mamy do czynienia z sytuacją, w której punkt p jest punktem przegięcia rzędu 2, a prosta bistyczna w tym punkcie jest nazywana **prostą hiperoskulującą**. Wobec powyższego, w najbardziej ekstremalnej sytuacji, możemy oczekiwać, że istnieje gładka kwartyka $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, która

[1] W tej kwestii, jednakże, zdania bywają podzielone.

posiada dokładnie 16 prostych bistycznych oraz 12 prostych hiperoskulujących. Poniższe twierdzenie, niezwykle zaskakujące, podaje pełną klasyfikację kwartyk o wspomnianej własności (po szczegóły odsyłamy do [21]).

Twierdzenie 3.2 (Komiya-Kuribayashi)
Niech $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie gładką kwartyką. Wówczas C posiada dokładnie 12 *punktów przegięcia rzędu* 2 *wtedy i tylko wtedy, gdy C jest jedną z poniższych kwartyk:*

1) C jest kwartyką Dycka, oznaczaną przez $\mathcal{D}$, zadaną przez

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4.$$

2) C jest kwartyką Komiya-Kuribayashiego, oznaczaną przez $\mathcal{K}^{\mathcal{K}}$, zadaną przez

$$G(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 3(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2).$$

Przechodzimy teraz do analizy geometrycznej układów bistycznych stowarzyszonych z powyższymi dwiema kwartykami, jak również z najbardziej symetryczną kwartyką (tj. o najliczniejszej grupie automorfizmów), czyli kwartyką Kleina. Okazuje się, że te wszystkie trzy kwartyki mają jedną dość nieoczekiwaną wspólną własność, a mianowicie są elementami pęku Cianiego.

Definicja 3.3
Pękiem Cianiego kwartyk nazywamy

$$Q_\lambda : \quad x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2),$$

przy czym $\lambda \in \mathbb{C}$.

Jeżeli teraz weźmiemy λ będącą jednym z pierwiastków równania

$$\lambda^2 + 3\lambda + 18 = 0,$$

to wówczas uzyskujemy kwartykę Kleina, którą będziemy oznaczać przez $\mathcal{K}$.

Przypomnijmy, że grupa automorfizmów kwartyki Kleina ma maksymalną możliwą liczność, tj.

$$\#\mathrm{Aut}(\mathcal{K}) = 168 = 84 \cdot (g(C) - 1),$$

przy czym prawa strona drugiej powyższej równości odpowiada sytuacji osiągnięcia oszacowania górnego na rząd grupy automorfizmów, a to wynika z klasycznego twierdzenia Hurwitza [18]. Dodatkowo, w przypadku kwartyki Kleina mamy dokładnie 28 bistycznych w klasycznym sensie, a to wynika wprost ze znanego faktu, że wszystkie punkty przegięcia kwartyki Kleina to punkty przegięcia rzędu 1.

Przejdźmy zatem do opisu kombinatorycznego układów 28 prostych bistycznych dla wybranych przez nas kwartyk, tj. kwartyki Dycka, Kleina i kwartyki Komiya-Kuribayashiego.

Poniższe twierdzenie, pozwalające oszacować maksymalną krotności punktów przecięcia bistycznych, wywodzi się z teorii powierzchni del Pezzo (zobacz, dla przykładu, [30]).

Stwierdzenie 3.3
Maksymalna krotność punktów przecięcia układów prostych bistycznych stowarzyszonych z gładkimi kwartykami wynosi 4.

Wobec powyższego, jeżeli $\mathcal{C}$ jest układem 28 prostych bistycznych stowarzyszonych z gładką kwartyką C, to wówczas spełnione jest następujące zliczanie kombinatoryczne:

$$\binom{28}{2} = n_2 + 3n_3 + 6n_4, \tag{3.4}$$

gdzie n_i oznacza liczbę i-krotnych punktów przecięcia prostych bistycznych. Okazuje się, że w przypadku układów 28 prostych bistycznych stowarzyszonych z naszymi trzema kwartykami uzyskujemy dość zaskakującą własność, a mianowicie w każdym przypadku $n_3 = 0$. Własność ta, według naszej najlepszej wiedzy, nie pojawia się w literaturze, zatem obserwacja ta stanowi istotne uzupełnienie luki w naszym rozumieniu układów prostych bistycznych. Przechodząc do konkretnych kwartyk, możemy udowodnić następujące stwierdzenia, wspomagając się obliczeniami przeprowadzonymi w programie `SINGULAR` oraz równaniami prostych bistycznych przedstawionymi w następnym rozdziale.

Stwierdzenie 3.4
28 *prostych bistycznych do kwartyki Kleina* $\mathcal{K}$ *posiada* 252 *podwójnych i* 21 *poczwórnych punktów przecięcia.*

Dowód. To, że układ 28 bistycznych posiada dokładnie 21 poczwórnych punktów przecięcia, jest znanym faktem w literaturze, zobacz [14, Exercise 6.22]. Pozostało nam wykazać, że $n_3 = 0$ oraz $n_2 = 252$. Oznaczmy przez Q równanie definiujące układ 28 prostych bistycznych, a sam układ oznaczmy przez $\mathcal{L}$. Niech $J_Q = \langle \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z} \rangle$. Przypomnijmy, że mamy następującą tożsamość

$$\deg(J_Q) = \tau(\mathcal{L}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{L})} (\mathrm{mult_p}(\mathcal{L}) - 1)^2,$$

przy czym najbardziej skrajna po prawie stronie równość wynika z faktu, że w przypadku układów prostych wszystkie osobliwości są quasi-jednorodne. Korzystając z programu

SINGULAR, możemy sprawdzić, że $\deg(J_Q) = 441$. Wobec tego

$$441 = \tau(\mathcal{L}) = n_2 + 4n_3 + 9n_4.$$

Korzystając teraz ze zliczania kombinatorycznego $\binom{28}{2} = n_2 + 3n_3 + 6n_4$, uzyskujemy

$$63 = n_3 + 3n_4.$$

Ponieważ $n_4 = 21$, a zatem $n_3 = 0$. Korzystając teraz wprost ze zliczania kombinatorycznego uzyskujemy

$$n_2 = \binom{28}{2} - 6n_4 = 252,$$

co kończy dowód. ■

Korzystając z dokładnie tych samych technik jak w powyższym dowodzie, możemy udowodnić następujące stwierdzenia.

Stwierdzenie 3.5
28 *prostych bistycznych do kwartyki Dycka* $\mathcal{D}$ *posiada* 288 *podwójnych oraz* 15 *poczwórnych punktów przecięcia.*

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku Stwierdzenia 3.5, jednakże liczba punktów poczwórnych dla tego układu, według naszych badań literatury, nie jest powszechnie znana. W tym celu, wspomagając się programem SINGULAR, musimy obliczyć stopień ideału $T_{\mathcal{D}}$, który jest generowany przez wszystkie pochodne cząstkowe rzędu trzeciego równania definiującego układ 28 bistycznych, a stopień ten wynosi 15. Wynika stąd wprost, że $n_4 = 15$. Dalsza część dowodu przebiega dokładnie tak samo jak w przypadku analogicznej części dowodu Stwierdzenia 3.4. ■

Stwierdzenie 3.6
28 *prostych bistycznych do kwartyki Komiya-Kuribayashiego* $\mathcal{K}^{\mathcal{K}}$ *posiada* 324 *podwójnych i* 9 *poczwórnych punktów przecięcia.*

Dowód. Dowód przebiega dokładnie tak samo jak w Stwierdzeniu 3.5. ■

Powyższe stwierdzenia, jak również dodatkowe eksperymenty numeryczne z dostatecznie symetrycznymi gładkimi kwartykami, tj. kwartykami, dla których grupa automorfizmów ma rząd przynajmniej 9, pozwalają zaobserwować, że liczba punktów poczwórnych dla układów 28 bistycznych jest ograniczona z góry przez 21 i jest osiągana w przypadku kwartyki Kleina. Obserwacje te, dość intrygujący, stanowiły motywację do następującego pytania.

Problem 3.1
Dla układu 28 prostych bistycznych $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ wskaż efektywne oszacowanie górne na liczbę poczwórnych punktów przecięcia.

Korzystając z Twierdzenia 3.1, możemy udowodnić następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.7
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem 28 prostych bistycznych stowarzyszonych z gładką kwartyką $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Wówczas $n_4 \leqslant 44$.

Dowód. Zastosujemy nierówność z Twierdzenia 3.1 dla układu składającego się z kwartyki C oraz stowarzyszonych 28 prostych bistycznych. Zauważmy, że w wyniku przecinania się bistycznych z kwartyką C uzyskujemy osobliwości A_3 lub A_7, przy czym przecięcie każdej prostej bistycznej w klasycznym sensie z kwartyką dostarcza dokładnie dwie osobliwości A_3, natomiast każda prosta hiperoskulująca przecinająca się z kwartyką dostarcza dokładnie jedną osobliwości A_7. Korzystając z oznaczeń jak w Twierdzeniu 3.1, mamy

$$t_3 = 32 + 2(12 - h), \quad t_7 = h,$$

gdzie h to liczba prostych hiperoskulujących kwartyki C. Podstawiając powyższe dane do nierówności (3.3), uzyskujemy

$$56 + n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant 28 + \frac{5}{2}(32 + 2(12 - h)) + \frac{29}{4}h = 168 + \frac{9}{4}h \geqslant 168. \tag{3.5}$$

Wobec tego uzyskujemy

$$n_2 + n_3 \geqslant n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geqslant 112.$$

Podstawmy teraz powyższe oszacowanie do zliczania kombinatorycznego

$$n_2 + 3n_3 + 6n_4 = \binom{28}{2}.$$

Wobec powyższego

$$\binom{28}{2} = 6n_4 + 3n_3 + n_2 \geqslant 6n_4 + 112,$$

co daje nam

$$n_4 \leqslant \frac{1}{6}\left(378 - 112\right),$$

zatem $n_4 \leqslant 44$. ■

Powyższe stwierdzenie nie jest jednak wystarczająco satysfakcjonujące, bowiem mamy bardzo dużą rozbieżność pomiędzy oszacowaniem górnym na liczbę punktów poczwórnych, a przykładem dającym największą znaną liczbę punktów poczwórnych, tj. układem 28 bistyczych do kwartyki Kleina. Okazuje się, że możemy dostać dużo lepsze oszacowanie na liczbę punktów poczwórnych, korzystając z dogłębnej analizy inwolucji gładkich kwartyk płaskich. W tym kontekście wspomnijmy wynik [19, Proposition 3.6].

Twierdzenie 3.3
Niech $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie gładką kwartyką i niech $\mathcal{L}$ będzie stowarzyszonym układem 28 *prostych bistycznych. Wówczas liczba punktów poczwórnych układu $\mathcal{L}$ jest równa liczbie inwolucji kwartyki C. Co więcej, liczba punktów poczwórnych jest ograniczona z góry przez* 21 *i jest osiągana dokładnie w przypadku* 28 *bistycznych do kwartyki Kleina.*

Powyższe twierdzenie, dość zaskakujące dla nas, pozwala nam oszacować z dołu liczbę punktów poczwórnych dla gładkich kwartyk będących elementami pęku Cianiego. Można zauważyć, że każda kwartyka w pęku Cianiego jest niezmienniczna względem działania grupy Σ_4, która może być widziana jako produkt półprosty (semi-direct product) postaci $(\mathbb{Z}_2)^2 \rtimes \Sigma_3$, przy czym Σ_3 działa przez permutacje na zmiennych x, y, z oraz $(\mathbb{Z}_2)^2$ działa przez zmianę znaku. Ponieważ grupa Σ_4 posiada dokładnie 9 inwolucji (jest to standardowe ćwiczenia z zakresu algebry abstrakcyjnej), zatem uzyskujemy następujący wynik, zobacz [19, Proposition 3.7].

Stwierdzenie 3.8
Niech C będzie gładką zespoloną kwartyką będącą gładkim i zredukowanym elementem pęku Cianiego, i niech $\mathcal{L}$ będzie stowarzyszonym układem 28 *prostych bistycznych. Wówczas $\mathcal{L}$ ma przynajmniej* 9 *punktów poczwórnych przecięcia.*

W kolejnej części tego rozdziału przedstawimy zwięzłe opisy kombinatoryczne dla pewnych układów 28 prostych bistycznych, podając odpowiednie równania tychże prostych, jak i współrzędne punktów poczwórnych i incydencje. Zdecydowaliśmy się na takie rozwiązanie, nie przenosząc żmudnych wyliczeń na koniec pracy, głównie ze względu na konieczność wprowadzenia odpowiedniej notacji, co zdecydowanie ułatwi czytelnikowi lekturę następnych rozdziałów.

3.3 Kombinatoryka układów 28 prostych bistycznych

3.3.1 Kwartyka Kleina

Zakładamy, że e jest pierwiastkiem równania $e^2 + e + 2 = 0$.

Tabela 3.1: Równania prostych bistycznych.

ℓ_i	równanie	ℓ_i	równanie	ℓ_i	równanie
ℓ_1 :	$y + ez$	ℓ_{11} :	$x + y + (e-1)z$	ℓ_{21} :	$x - ez$
ℓ_2 :	$y - ez$	ℓ_{12} :	$x + ez$	ℓ_{22} :	$x + y + (-e+1)z$
ℓ_3 :	$ex - y$	ℓ_{13} :	$x + ey$	ℓ_{23} :	$(e-1)x + y - z$
ℓ_4 :	$ey - z$	ℓ_{14} :	$x - y + z$	ℓ_{24} :	$x + (-e+1)y - z$
ℓ_5 :	$(-e+1)x + y - z$	ℓ_{15} :	$x + (e-1)y + z$	ℓ_{25} :	$x + (e-1)y - z$
ℓ_6 :	$x - y + (e-1)z$	ℓ_{16} :	$ey + z$	ℓ_{26} :	$(e-1)x - y - z$
ℓ_7 :	$x + (1-e)y + z$	ℓ_{17} :	$(e-1)x + y + z$	ℓ_{27} :	$x - y - z$
ℓ_8 :	$ex + y$	ℓ_{18} :	$ex + z$	ℓ_{28} :	$ex - z$
ℓ_9 :	$x - ey$	ℓ_{19} :	$x + y - z$		
ℓ_{10} :	$x - y + (1-e)z$	ℓ_{20} :	$x + y + z$		

Tabela 3.2: Współrzędne poczwórnych punktów przecięcia.

p_i	współrzędne	p_i	współrzędne
p_1 :	$(1:0:0)$	p_{12} :	$(-1:0:1)$
p_2 :	$(e:-e-2:-e)$	p_{13} :	$(-2e-2:e-1:e-1)$
p_3 :	$(e:e+2:e)$	p_{14} :	$(e:-1:-1)$
p_4 :	$(-e:e+2:-e)$	p_{15} :	$(-1:1:0)$
p_5 :	$(e:e+2:-e)$	p_{16} :	$(0:1:0)$
p_6 :	$(0:0:1)$	p_{17} :	$(e+2:e:-e)$
p_7 :	$(-e+1:e-1:-2e-2)$	p_{18} :	$(-1:-1:e)$
p_8 :	$(-e+1:-e+1:2e+2)$	p_{19} :	$(-1:1:-e)$
p_9 :	$(0:1:1)$	p_{20} :	$(0:-1:1)$
p_{10} :	$(-3e-2:e-2:-e+2)$	p_{21} :	$(1:0:1)$
p_{11} :	$(1:1:0)$		

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}
ℓ_1	+	+	+																		
ℓ_2	+			+	+																
ℓ_3		+		+		+															
ℓ_4	+						+	+													
ℓ_5				+			+		+												
ℓ_6				+						+	+										
ℓ_7							+			+		+									
ℓ_8			+		+	+															
ℓ_9						+				+			+								
ℓ_{10}		+									+		+								
ℓ_{11}			+											+	+						
ℓ_{12}										+				+		+					
ℓ_{13}						+								+			+				
ℓ_{14}									+		+	+									
ℓ_{15}												+		+				+			
ℓ_{16}	+																	+	+		
ℓ_{17}			+															+		+	
ℓ_{18}							+									+		+			
ℓ_{19}									+						+						+
ℓ_{20}												+			+					+	
ℓ_{21}													+			+	+				
ℓ_{22}					+										+		+				
ℓ_{23}					+			+	+												
ℓ_{24}													+						+		+
ℓ_{25}								+									+				+
ℓ_{26}		+																	+	+	
ℓ_{27}											+									+	+
ℓ_{28}								+								+			+		

Tabela 3.3: Tabela incydencji punktów poczwórnych i prostych bistycznych.

3.3.2 Kwartyka Dycka

Zakładamy, że ω jest pierwiastkiem prymitywnym równania $\omega^4 + 1 = 0$.

Tabela 3.4: Równania prostych bistycznych i hiperoskulujących.

ℓ_i	równanie	ℓ_i	równanie	ℓ_i	równanie
ℓ_1 :	$-\omega y + z$	ℓ_{11} :	$x - \omega^2 y + z$	ℓ_{21} :	$\omega^2 x - \omega^2 y + z$
ℓ_2 :	$\omega y + z$	ℓ_{12} :	$x + \omega^2 y + z$	ℓ_{22} :	$\omega^2 x + \omega^2 y + z$
ℓ_3 :	$-\omega^3 y + z$	ℓ_{13} :	$-\omega x + z$	ℓ_{23} :	$-\omega^3 x + z$
ℓ_4 :	$\omega^3 y + z$	ℓ_{14} :	$\omega x + z$	ℓ_{24} :	$\omega^3 x + z$
ℓ_5 :	$-x - y + z$	ℓ_{15} :	$-\omega^2 x - y + z$	ℓ_{25} :	$-\omega x + y$
ℓ_6 :	$-x + y + z$	ℓ_{16} :	$-\omega^2 x + y + z$	ℓ_{26} :	$\omega x + y$
ℓ_7 :	$-x - \omega^2 y + z$	ℓ_{17} :	$-\omega^2 x - \omega^2 y + z$	ℓ_{27} :	$-\omega^3 x + y$
ℓ_8 :	$-x + \omega^2 y + z$	ℓ_{18} :	$-\omega^2 x + \omega^2 y + z$	ℓ_{28} :	$\omega^3 x + y$
ℓ_9 :	$x - y + z$	ℓ_{19} :	$\omega^2 x - y + z$		
ℓ_{10} :	$x + y + z$	ℓ_{20} :	$\omega^2 x + y + z$		

Tabela 3.5: Współrzędne poczwórnych punktów przecięcia.

p_i	współrzędne	p_i	współrzędne
p_1 :	$(1 : 0 : 0)$	p_9 :	$(\omega^2 : 1 : 0)$
p_2 :	$(1 : 0 : 1)$	p_{10} :	$(0 : 1 : -\omega^2)$
p_3 :	$(0 : 1 : 1)$	p_{11} :	$(-1 : 0 : 1)$
p_4 :	$(-1 : 1 : 0)$	p_{12} :	$(0 : 1 : 0)$
p_5 :	$(1 : 1 : 0)$	p_{13} :	$(-1 : 0 : -\omega^2)$
p_6 :	$(0 : 1 : -1)$	p_{14} :	$(-1 : 0 : \omega^2)$
p_7 :	$(0 : 1 : \omega^2)$	p_{15} :	$(0 : 0 : 1)$
p_8 :	$(-\omega^2 : 1 : 0)$		

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
ℓ_1	+														
ℓ_2	+														
ℓ_3	+														
ℓ_4	+														
ℓ_5		+	+	+											
ℓ_6		+			+	+									
ℓ_7		+					+	+							
ℓ_8		+							+	+					
ℓ_9			+		+						+				
ℓ_{10}				+		+					+				
ℓ_{11}							+		+		+				
ℓ_{12}								+		+	+				
ℓ_{13}												+			
ℓ_{14}												+			
ℓ_{15}			+						+				+		
ℓ_{16}						+		+					+		
ℓ_{17}				+			+						+		
ℓ_{18}					+					+			+		
ℓ_{19}			+					+						+	
ℓ_{20}						+			+					+	
ℓ_{21}					+		+							+	
ℓ_{22}				+						+				+	
ℓ_{23}												+			
ℓ_{24}												+			
ℓ_{25}															+
ℓ_{26}															+
ℓ_{27}															+
ℓ_{28}															+

Tabela 3.6: Tabela incydencji punktów poczwórnych i prostych bistycznych.

3.3.3 Kwartyka Komiya-Kuribayashiego

Zakładamy, że $r = \sqrt{5}$ oraz $i^2 = -1$.

Tabela 3.7: Równania prostych bistycznych i hiperoskulujących.

ℓ_i	równanie	ℓ_i	równanie	ℓ_i	równanie
ℓ_1 :	$-\frac{1}{5}r(2i+1)y+z$	ℓ_{11} :	$x-2iy+z$	ℓ_{21} :	$-\frac{1}{5}r(2i+1)x+z$
ℓ_2 :	$-\frac{1}{5}r(2i-1)y+z$	ℓ_{12} :	$x+2iy+z$	ℓ_{22} :	$-\frac{1}{5}r(2i-1)x+z$
ℓ_3 :	$\frac{1}{5}r(2i-1)y+z$	ℓ_{13} :	$-2ix-y+z$	ℓ_{23} :	$\frac{1}{5}r(2i-1)x+z$
ℓ_4 :	$\frac{1}{5}r(2i+1)y+z$	ℓ_{14} :	$-2ix+y+z$	ℓ_{24} :	$\frac{1}{5}r(2i+1)x+z$
ℓ_5 :	$-x-y+z$	ℓ_{15} :	$-\frac{1}{2}ix-\frac{1}{2}iy+z$	ℓ_{25} :	$-\frac{1}{5}r(2i+1)x+y$
ℓ_6 :	$-x+y+z$	ℓ_{16} :	$-\frac{1}{2}ix+\frac{1}{2}iy+z$	ℓ_{26} :	$-\frac{1}{5}r(2i-1)x+y$
ℓ_7 :	$-x-2iy+z$	ℓ_{17} :	$\frac{1}{2}ix-\frac{1}{2}iy+z$	ℓ_{27} :	$\frac{1}{5}r(2i-1)x+y$
ℓ_8 :	$-x+2iy+z$	ℓ_{18} :	$\frac{1}{2}ix+\frac{1}{2}iy+z$	ℓ_{28} :	$\frac{1}{5}r(2i+1)x+y$
ℓ_9 :	$x-y+z$	ℓ_{19} :	$2ix-y+z$		
ℓ_{10} :	$x+y+z$	ℓ_{20} :	$2ix+y+z$		

Tabela 3.8: Współrzędne punktów poczwórnych.

p_i	współrzędne	p_i	współrzędne
p_1 :	$(1:0:-1)$	p_6 :	$(0:1:1)$
p_2 :	$(1:0:0)$	p_7 :	$(-1:1:0)$
p_3 :	$(1:0:1)$	p_8 :	$(1:1:0)$
p_4 :	$(0:1:-1)$	p_9 :	$(0:0:1)$
p_5 :	$(0:1:0)$		

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
ℓ_1		+							
ℓ_2		+							
ℓ_3		+							
ℓ_4		+							
ℓ_5			+			+	+		
ℓ_6			+	+				+	
ℓ_7			+						
ℓ_8			+						
ℓ_9	+					+		+	
ℓ_{10}	+			+			+		
ℓ_{11}	+								
ℓ_{12}	+								
ℓ_{13}						+			
ℓ_{14}				+					
ℓ_{15}							+		
ℓ_{16}								+	
ℓ_{17}								+	
ℓ_{18}							+		
ℓ_{19}						+			
ℓ_{20}				+					
ℓ_{21}					+				
ℓ_{22}					+				
ℓ_{23}					+				
ℓ_{24}					+				
ℓ_{25}									+
ℓ_{26}									+
ℓ_{27}									+
ℓ_{28}									+

Tabela 3.9: Tabela incydencji punktów poczwórnych i prostych bistycznych.

Rozdział 4

Wolne, niemal wolne i plus-jeden generowane układy prostych i kwartyk

W tym dość technicznym rozdziale omówimy wolność, niemal wolność oraz plus-jeden generowanie dla układów składających się z prostych i jednej gładkiej kwartyki, a w końcowej części rozdziału także dla układów złożonych z elementów pewnego pęku kwartyk. W konstrukcji krzywych wykorzystamy dane zgromadzone w poprzednim rozdziale, tj. dane odnośnie prostych bistycznych, ich punktów przecięcia oraz tabeli incydencji, wobec czego w opisach będziemy, mimochodem, korzystać z numeracji oraz wszystkich wymaganych opisów z poprzednich części pracy.

Cały Rozdział 4 jest oparty na obliczeniach symbolicznych, które przeprowadziliśmy w programie `SINGULAR`, a wszystkie kody umożliwiające zweryfikowanie zaprezentowanych wyników można uzyskać, na żądanie, u autora niniejszej dysertacji.

4.1 Wyniki ogólne

Zaczynamy od przypadku stwierdzenia klasyfikującego przypadek dokładnie jednej gładkiej kwartyki i jednej prostej.

Stwierdzenie 4.1
Nie istnieje wolny układ C składający się z dokładnie jednej prostej ℓ oraz jednej gładkiej kwartyki Q w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Dowód. Zauważmy, że mamy następujące możliwości dla przecięć prostej ℓ i kwartyki Q:

- $Q.\ell = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, tj. mamy cztery osobliwości A_1,

- $Q.\ell = 2p_1 + p_2 + p_3$, tj. mamy jedną osobliwość A_3 oraz dwie osobliwości A_1,
- $Q.\ell = 2p_1 + 2p_2$, tj. ℓ jest prostą bistyczną i mamy dwie osobliwości A_3,
- $Q.\ell = 3p_1 + p_2$, tj. mamy jeden punkt typu A_5 i jeden punkt typu A_1.
- $Q.\ell = 4p$, tj. ℓ jest prostą hiperoskulującą i mamy punkt osobliwy A_7.

Wobec powyższej analizy maksymalna liczba Tjuriny, jaką może uzyskać nasz układ, to 7. Z drugiej strony, korzystając z Twierdzenia 1.2, uzyskujemy, że układ C byłby wolny, gdyby jego całkowita liczba Tjuriny wynosiła $\tau(C) \in \{12, 13\}$, co jest niemożliwe do zrealizowania. ∎

Zauważmy, że z naszej analizy wynika następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.2
Nie istnieje niemal wolny układ C składający się z dokładnie jednej prostej ℓ oraz jednej gładkiej kwartyki Q w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Dowód. Korzystając z Twierdzenia 1.3, dostajemy, że nasz układ C byłby niemal wolny, gdyby jego całkowita liczba Tjuriny wynosiła $\tau(C) \in \{11, 12\}$, a w świetle powyższego stwierdzenia taka sytuacja jest niemożliwa. ∎

Przechodzimy teraz do kolejnego przypadku, tj. układów składających się z dwu prostych i jednej gładkiej kwartyki.

Stwierdzenie 4.3
Nie istnieje wolny układ C składający się z jednej gładkiej kwartyki i dwóch różnych prostych.

Dowód. Dowód opiera się na technice programowania liniowego. W pierwszej kolejności zauważmy, że dla krzywej C stopnia parzystego $d = 2m$ złożonej z gładkiej kwartyki i dwóch różnych prostych możliwe są tylko ADE osobliwości, a dokładnie osobliwości A_1, A_3, D_4, A_5, D_6, A_7, D_8, D_{10}. Zachodzi więc następująca nierówność:

$$\mathrm{mdr}(C) = d_1 \geqslant m - 1, \tag{4.1}$$

a wynika ona wprost z dowodu [12, Theorem 2.9]. Przypuśćmy teraz, że C spełnia założenia naszego twierdzenia oraz jest wolna. Wówczas $d_1 = 2$ oraz na mocy Twierdzenia 1.2 spełniona jest równość

$$\tau(C) = d_1^2 - d_1(d-1) + (d-1)^2 = 19.$$

Wobec powyższego zachodzi następujący układ równań diofantycznych z niewiadomymi $(n_2, t_3, n_3, t_5, d_6, t_7, d_8, d_{10}) \in \mathbb{Z}^6_{\geqslant 0}$, tj.

$$(\square) \ : \ \begin{cases} n_2 + 2t_3 + 3n_3 + 3t_5 + 4d_6 + 4t_7 + 5d_8 + 6d_{10} = 8 \\ n_2 + 3t_3 + 4n_3 + 5t_5 + 6d_6 + 7t_7 + 8d_8 + 10d_{10} = 19. \end{cases}$$

Korzystając teraz z dowolnego programu rozwiązującego równania diofantyczne (zobacz **Dodatek B**, gdzie znajduje się nasz kod napisany w języku `Python`), możemy zauważyć, że powyższy układ nie posiada **żadnych** rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych, co kończy dowód. ■

4.2 Konstrukcje układów oparte na kwartyce Dycka

W tej części, skupimy się na konstrukcjach krzywych co najwyżej 3-syzygijnych z wykorzystaniem kwartyki Dycka oraz prostych hiperoskulujących.

Stwierdzenie 4.4
Układ krzywych składający się z kwartyki Dycka i trzech hiperoskulujących prostych do kwartyki Dycka przecinających się w punkcie potrójnym jest plus-jeden generowany.

Dowód. Jak łatwo zauważyć, spoglądając wprost na tabelę incydencji dla prostych hiperoskulujących do kwartyki Dycka, mamy dokładnie 12 takich układów, a nasz dowód przeprowadzimy tylko dla jednego konkretnego układów, bowiem w pozostałych przypadkach dowód jest zupełnie analogiczny.

Rozważmy układ $\mathcal{DL}$ dany przez wielomian definiujący

$$Q(x, y, z) = (ey + z)(-ey + z)(e^3y + z) \cdot (x^4 + y^4 + z^4),$$

przy czym $e^4+1 = 0$. Układ $\mathcal{DL}$ posiada dokładnie jedną osobliwość D_4 oraz trzy osobliwości A_7, wobec czego całkowita liczba Tjuriny dla tego układu wynosi $\tau(\mathcal{DL}) = 21 + 4 = 25$. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy wyznaczyć minimalną rezolwentę wolną algebry Milnora stowarzyszonej z układem $\mathcal{DL}$, która ma następującą postać:

$$0 \to S(-12) \to S(-11) \oplus S(-10) \oplus S(-9) \to S^3(-6) \to S.$$

Ponieważ$(d_1, d_2, d_3) = (3, 4, 5)$, $d_1 + d_2 = 7$ oraz $d_3 > d_2$, a zatem układ $\mathcal{DL}$ jest plus-jeden generowany. ■

Stwierdzenie 4.5
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem składającym się z kwartyki Dycka i 4 hiperoskulujących prostych o tej własności, że proste te przecinają się w dokładnie jednym punkcie krotności 4. Wówczas $\mathcal{C}$ jest jednym z następujących trzech układów danych przez następujące wielomiany definiujące:

- $Q_1(x, y, z) = (x^4 + y^4) \cdot (x^4 + y^4 + z^4)$,
- $Q_2(x, y, z) = (y^4 + z^4) \cdot (x^4 + y^4 + z^4)$,
- $Q_3(x, y, z) = (x^4 + z^4) \cdot (x^4 + y^4 + z^4)$.

Co więcej, układ $\mathcal{C}$ jest wolny.

Dowód. Pierwsza część naszego stwierdzenia wynika z następującej prostej obserwacji. Jeżeli rozważymy teraz układ $\mathcal{H}$ składający się z dokładnie 12 hiperoskulujących prostych do kwartyki Dycka zadany przez wielomian definiujący

$$Q(x, y, z) = (x^4 + y^4) \cdot (y^4 + z^4) \cdot (x^4 + z^4),$$

to zauważymy, że $\mathcal{H}$ posiada dokładnie 48 podwójnych punktów przecięcia (osobliwości A_1) i dokładnie 3 punkty poczwórne (osobliwości X_9). Ta obserwacja pozwala nam wyznaczyć wielomiany definiujące Q_1, Q_2, Q_3. Druga część naszego stwierdzenia wynika wprost z [10, Theorem 1.5]. ■

Należy zwrócić uwagę na fakt, że sytuacja, w której 4 proste hiperoskulujące do gładkiej kwartyki spotykają się w dokładniej jednym punkcie, jest niezwykle rzadka. Dla przykładu, kwartyka Kleina nie posiada żadnych prostych hiperoskulujących, natomiast 12 prostych hiperoskulujących do kwartyki Komiya-Kuribayashiego przecinają się tylko w 66 punktach podwójnych.

Kontynuujemy nasze dalsze rozważania w kontekście kwartyki Dycka.

Stwierdzenie 4.6
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem składającym się z kwartyki Dycka oraz pięciu hiperoskulujących prostych do kwartyki Dycka o tej własności, że 4 z nich spotykają się w jednym punkcie poczwórnym. Wówczas $\mathcal{C}$ jest układem wolnym.

Dowód. Patrząc na tabelę incydencji prostych hiperoskulujących do kwartyki Dycka, możemy zauważyć, że mamy dokładnie 24 takie układy. Opiszemy teraz wielomiany definiujące te układy, a mianowicie

$$H_k^1(x, y, z) = Q_1(x, y, z) \cdot \ell_k(x, y, z),$$

gdzie $\ell_k(x,y,z)$ jest jedną z 8 form liniowych zadanych przez czynniki liniowe wielomianu $(y^4+z^4)\cdot(x^4+z^4)$ oraz Q_1 to wielomian definiujący ze Stwierdzenia 4.5. W analogiczny sposób konstruujemy wielomiany definiujące H_k^2 oraz H_k^3 dla $k\in\{1,\ldots,8\}$. W każdym z tych przypadków całkowita liczba Tjuriny dla naszych układów wynosi 48, tj. mamy pięć punktów osobliwych A_7, jedną osobliwość X_9 oraz cztery osobliwości A_1. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy pokazać, że dla każdego z naszych układów krzywych minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygii wynosi $d_1=4$. Wobec powyższego mamy

$$48 = d_1^2 - d_1(d-1) + (d-1)^2 = \tau(\mathcal{C}) = 48,$$

a zatem $\mathcal{C}$ jest układem wolnym. ■

Przechodzimy teraz do konstrukcji układów krzywych stopnia 10 , które są niemal wolne. W tym celu potrzebujemy wprowadzić następującą konstrukcję. W sytuacji prostych hiperoskulujących do kwartyki Dycka, rozważmy następujące wielomiany definiujące

$$G_1^{i,j}(x,y,z) = Q_1(x,y,z)\cdot\ell_i(x,y,z)\cdot\ell_j(x,y,z),$$

gdzie $\ell_i(x,y,z)$, $\ell_j(x,y,z)$ to parami różne formy liniowe będące czynnikami liniowymi wielomianu jednorodnego $(x^4+z^4)\cdot(y^4+z^4)$ oraz Q_1 to wielomian zdefiniowany w Stwierdzeniu 4.5. W zupełnie analogiczny sposób definiujemy układy $G_2^{i,j}$ oraz $G_3^{i,j}$.

Stwierdzenie 4.7
Układy krzywych $\mathcal{C}_k^{i,j}$ dane wielomianami $G_k^{i,j}$ dla $k\in\{1,2,3\}$ są niemal wolne.

Dowód. Zauważmy, że całkowita liczba Tjuriny dla każdego ze skonstruowanych układów wynosi 60, tj. mamy dokładnie 6 osobliwości A_7, jedną osobliwość X_9 oraz 9 osobliwości A_1. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy wyznaczyć, dla każdego z naszych układów, minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygii, który wynosi $d_1=5$. Wówczas, korzystając z kryterium niemal wolności układów z Twierdzenia 1.3, mamy

$$61 = d_1^2 - d_1(d-1) + (d-1)^2 = \tau(\mathcal{C}_k^{i,j}) + 1 = 60+1 = 61,$$

a zatem $\mathcal{C}_k^{i,j}$ układy są niemal wolne. ■

Ostatnim wynikiem w tej część pracy jest konstrukcja układów niemal wolnych stopnia 12.

Stwierdzenie 4.8
Rozważmy następujące układy krzywych

- $C_1 = V((x^4+y^4+z^4)\cdot(x^4+y^4)\cdot(y^4+z^4))$,

- $C_2 = V((x^4 + y^4 + z^4) \cdot (x^4 + y^4) \cdot (x^4 + z^4))$,
- $C_3 = V((x^4 + y^4 + z^4) \cdot (y^4 + z^4) \cdot (x^4 + z^4))$.

Wówczas C_1, C_2, C_3 są niemal wolne.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak w powyższym stwierdzeniu, zatem go pominiemy. ■

4.3 Konstrukcje układów oparte na kwartyce Kleina

W tej dość krótkiej części skupimy się na przypadku kwartyki Kleina. Przypomnijmy, że kwartyka ta nie posiada prostych hiperoskulujących, a zatem wszystkie proste bistyczne zadają tylko osobliwości A_3. Niemniej, w tej części skonstruujemy ciekawe przykłady plus-jeden generowanych układów, które mają niezwykłe ciekawe znaczenie w kontekście rezultatów uzyskanych w pracy [13].

Stwierdzenie 4.9
Niech $\mathcal{QK}$ będzie układem składającym się z kwartyki Kleina oraz czterech prostych bistycznych przecinających się w jednym punkcie poczwórnym. Wówczas układ $\mathcal{QK}$ jest plus-jeden generowany o wykładnikach $(d_1, d_2, d_3) = (4, 4, 7)$.

Dowód. Zauważmy, że mamy dokładnie 21 takich układów, co wynika wprost z tabeli incydencji dla prostych bistycznych dla kwartyki Kleina. Wszystkie te układy posiadają dokładnie takie same słabe kombinatoryki, tj. mamy osiem osobliwości A_3 oraz jedną osobliwość X_9. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy wyznaczyć minimalną rezolwentę wolną algebry Milnora stowarzyszonej z układem $\mathcal{QL}$, mianowicie

$$0 \to S(-15) \to S(-14) \oplus S^2(-11) \to S^3(-7) \to S.$$

Ponieważ $(d_1, d_2, d_3) = (4, 4, 7)$, $d_1 + d_2 = 8$ oraz $d_3 > d_2$, zatem nasz układ jest plus-jeden generowany. ■

Dlaczego nasze nowo skonstruowane układy krzywych są ciekawe? W niedawnej pracy Dimca i Sticlaru badali własności homologiczne krzywych m-syzygijnych, a wśród wielu ciekawych rezultatów udowodnili następujące dwa stwierdzeniem, zobacz [13, Theorem 2.4] oraz [13, Corollary 5.3].

Stwierdzenie 4.10
Niech $C\colon f = 0$ będzie krzywą m-syzygijną stopnia d o wykładnikach $1 \leqslant d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_m$ oraz $m \geqslant 3$. Wówczas $d_1 + d_2 \geqslant d$ oraz $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant d - 1$.

Stwierdzenie 4.11

Niech $C\colon f = 0$ będzie krzywą 3-syzygijną stopnia $d \geqslant 3$. Jeżeli wszystkie składowe nierozkładalne C_i krzywej C są wymierne oraz C nie jest plus jeden generowana, to wówczas $d_3 \leqslant d - 2$.

W świetle powyższych wyników nasze układy oparte na kwartyce Kleina okazują się być ekstremalne w kontekście ograniczenia górnego na wykładnik d_3 w klasie układów składających się z krzywych posiadających dodatni genus. Z drugiej strony nasze przykłady pokazują, że założenia we wspominanych powyżej stwierdzeniach są konieczne i optymalne.

Uwaga 4.1

W kontekście Stwierdzenia 4.10 okazuje się, że możemy skonstruować przykład układu krzywych, który jest 3-syzygijny o tej własności, że $d_3 = d - 1$, ale nie jest plus-jeden generowany.

Rozważmy następujący układ $\mathcal{DL}$ dany wielomianem

$$Q(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4)(x^4 - y^4).$$

Układ ten posiada dokładnie 16 osobliwości A_1 oraz jedną osobliwość X_9. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy wyznaczyć minimalną rezolwentę wolną algebry Milnora stowarzyszonej z układem $\mathcal{DL}$, mianowicie

$$0 \to S(-17) \to S(-14) \oplus S(-13) \oplus S(-11) \to S^3(-7) \to S.$$

Ponieważ $(d_1, d_2, d_3) = (4, 6, 7)$, wobec czego $d_1 + d_2 > 8$, a zatem nasz układ nie jest plus-jeden generowany. Z drugiej strony $d_3 = d - 1 = 7$, a zatem w świetle Stwierdzenia 4.10 nasz układ realizuje maksymalną możliwą wartość wykładnika d_3.

4.4 Konstrukcje układów oparte na kwartyce Komiya-Kuribayashiego

Przechodzimy teraz do konstrukcji 3-syzygijnych układów krzywych z wykorzystaniem kwartyki Komiya-Kuribayashiego. Jak wiemy, kwartyka ta ma dokładnie 12 hiperoskulującycych prostych, jednakże proste te przecinają się tylko w punktach podwójnych, co stanowi znacznie utrudnienie w procesie konstrukcji ciekawych, z naszego punktu widzenia, układów krzywych.

Stwierdzenie 4.12

Układ krzywych złożony z kwartyki Komiya-Kuribayashiego oraz dwóch prostych bistycznych (zwyczajnych) i dwóch prostych hiperoskulujących o tej własności, że te cztery proste *przecinają się w dokładnie jednym punkcie jest układem plus-jeden generowanym.*

Dowód. Nasz dowód przeprowadzimy dla jednego konkretnego układu krzywych, bowiem w pozostałych przypadkach rozumowanie jest zupełnie analogiczne. Oznaczmy, tak jak wcześniej, przez $G(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + 3(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)$ wielomian definiujący kwartykę Komiya-Kuribayashiego. Rozpatrzmy układ krzywych $\mathcal{K}^{\mathcal{K}}\mathcal{L}$ zdefiniowanych przez wielomian

$$Q(x,y,z) = (-x-y+z)(-x+y+z)(-x-2iy+z)(-x+2iy+z)\cdot G(x,y,z).$$

Układ $\mathcal{K}^{\mathcal{K}}\mathcal{L}$ ma dokładnie jedną osobliwość X_9, cztery osobliwości A_3 oraz dwie osobliwości A_7, zatem całkowita liczba Tjuriny układu wynosi $\tau(\mathcal{KL}) = 14 + 12 + 9 = 35$. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy wyznaczyć minimalną rezolwentę wolną algebry Milnora, która ma postać

$$0 \to S(-13) \to S(-12) \oplus S^2(-11) \to S^3(-7) \to S.$$

Wobec powyższego $(d_1, d_2, d_3) = (4, 4, 5)$, $d_1 + d_2 = 8$ oraz $d_3 > d_2$, zatem układ krzywych jest plus-jeden generowany. ■

W dalszej części tego rozdziału skupimy się na konstruowaniu krzywych wolnych z wykorzystaniem pęku generowanego przez pewne dwie zredukowane kwartyki. Nasz pomysł nawiązuje bezpośrednio do pracy [8], w której to Dimca bada własności minimalnego stopnia relacji syzygii dla układów krzywych generowanych przez pęki krzywych. Zaczynamy od krótkiego wprowadzenia oznaczeń.

Niech $\mathcal{C}\colon F = 0$ będzie układem krzywych takim, że wielomian definiujący układu ma postać

$$F = Q_1 \cdots Q_m,\ m > 1, \tag{4.2}$$

przy czym $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \ldots = \deg Q_m \geqslant 1$ oraz krzywe $C_i\colon Q_i = 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ są elementami pęku generowanego przez dwie krzywe zredukowane K_1, K_2 tego samego ustalonego stopnia, czyli $\deg(K_1) = \deg(K_2) = k$. Ściślej ujmując, rozważamy pęk krzywych postaci

$$\mathcal{P}\colon \quad uK_1 + vK_2, \quad (u:v) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}. \tag{4.3}$$

W naszych rozważaniach wymagamy, aby wszystkie krzywe z pęku były tego samego stopnia, ale nie będziemy wymagać ani gładkości krzywych, ani własności ich zredukowania.

Przechodzimy teraz do naszej sytuacji. Niech pęk $\mathcal{P}$ będzie generowany przez następujące krzywe

$$K_1\colon \quad x^4 + y^4 + z^4 + 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 0, \tag{4.4}$$

czyli kwartykę Komiya-Kuribayashiego, oraz

$$K_2\colon \quad (-2ix - y + z)(-2ix + y + z)(2ix - y + z)(2ix + y + z) = 0, \tag{4.5}$$

czyli przez kwartykę rozkładalną złożoną z czterech prostych hiperoskulujących do kwartyki Komiya-Kuribayashiego. Rozważmy następujący zbiór 4 wyróżnionych punktów, tj. zbiór punktów bazowych naszego pęku:

$$\mathcal{B} = \{(-i : -1 : 1), (-i : 1 : 1), (i : -1 : 1), (i : 1 : 1)\}. \tag{4.6}$$

Wszystkie punkty zbioru $\mathcal{B}$, widziane jako punkty przecięcia krzywych K_1 i K_2, to osobliwości A_7.

Rozważmy układ $C = \{K_1, K_2\}$ zdefiniowanych powyżej. Punkty osobliwe tego układu to oczywiście 4 osobliwości A_7 oraz mamy dodatkowo 6 osobliwości A_1. Wobec powyższego

$$\tau(C) = 4 \cdot 7 + 6 = 34.$$

Przypomnijmy, że jeżeli układ C byłby wolny, to wówczas minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygii byłby mniejszy od połowy stopnia krzywej C, wobec czego $\mathrm{mdr}(C) \in \{1, 2, 3\}$. Korzystając teraz z Twierdzenia 1.2, oznaczałoby to, że $\tau(C) \in \{37, 39, 43\}$. Ponieważ całkowita liczba Tjuriny układu C wynosi 34, zatem układ ten nie może być wolny. Stosując podobny argument, możemy zauważyć, że układ C nie może być również niemal wolny. W poszukiwaniu układów wolnych złożonych z kwartyk będących elementami naszego pęku $\mathcal{P}$ zastępujemy w układzie C kwartykę K_1 przez kwartykę $K_1 - K_2$, której wielomian definiujący ma postać

$$Q_{(1:-1)}(x, y, z) = -15x^4 - 5x^2y^2 - 5x^2z^2 + 5y^2z^2.$$

Indeks dolny $(1 : -1)$ w oznaczeniu wielomianu odnosi się do punktu $(u : v) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ występującego w (4.3). Powyższa kwartyka jest nierozkładalna, ale nie jest gładka, bowiem ma dwie osobliwości A_1 w $p_1 = (0 : 0 : 1)$ i $p_2 = (0 : 1 : 0)$. Oznaczmy nowo otrzymany układ przez $C_1 = \{K_1 - K_2, K_2\}$. Wówczas

$$\tau(C_1) = 4 \cdot 7 + 6 + 2 = 36,$$

zatem nasz układ C_1 może być niemal wolny pod warunkiem, że $\mathrm{mdr}(C_1) = 4$. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy sprawdzić, że faktycznie $\mathrm{mdr}(C_1) = 4$, co oznacza C_1 jest układem niemal wolnym.

Kolejno, uzupełniamy układ C_1 o dodatkową kwartykę postaci $-16K_1 + K_2$ o wielomianie definiującym

$$Q_{(-16:1)}(x,y,z) = -40x^2y^2 - 15y^4 - 40x^2z^2 - 50y^2z^2 - 15z^4,$$

uzyskując układ $C_2 = \{-16K_1 + K_2, K_1 - K_2, K_2\}$. Nasza kwartyka $-16K_1 + K_2$ jest nierozkładalna, ale nie jest gładka, bowiem ma jedną osobliwość A_1 w $p = (1:0:0)$. Korzystając z programu `SINGULAR`, możemy wyznaczyć minimalną rezolwentę wolną algebry Milnora stowarzyszonej z układem C_2, która ma postać

$$0 \to S(-18) \oplus S(-15) \to S^3(-11) \to S,$$

co oznacza, że układ C_2 jest wolny.

Przechodzimy teraz do bardziej złożonych układów. W celu uzasadnienia naszych dalszych rozważań przywołajmy wynik [8, Theorem 1.8].

Twierdzenie 4.1
Niech $\mathcal{C}$ będzie układem krzywych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ takim, że jego wielomian definiujący ma postać

$$f = Q_1 \cdots Q_m,$$

przy czym $m \geqslant 3$, $\deg(Q_1) = \ldots = \deg(Q_m) = k \geqslant 2$, oraz krzywe $C_i\colon Q_i = 0$ są elementami pęku $\mathcal{P} : uC_1 + vC_2$. Przypuśćmy, że $\mathcal{P}$ ma zerowymiarowy zbiór punktów bazowych oraz posiada tylko zredukowane elementy. Wówczas albo $\mathrm{mdr}(f) = 2k-2$, albo $m = 3$ oraz $\mathrm{mdr}(f) \leqslant 2k-3$, i dodatkowo zachodzi jeden z poniższych dwu przypadków:

- *$k \geqslant 4$ oraz $\mathrm{mdr}(f) \leqslant k+1$. Wówczas zachodzi równość, tj. $\mathrm{mdr}(f) = k+1$ oraz układ krzywych $\mathcal{C}$ jest wolny, i wtedy $(d_1, d_2) = (k+1, 2k-2)$.*
- *$k \geqslant 5$ oraz $k+2 \leqslant \mathrm{mdr}(f) \leqslant 2k-3$.*

Uzupełnijmy teraz układ C_2 o kolejną krzywą z naszego pęku. Dla przykładu, rozważmy układ $C_3 = \{-16K_1 + K_2, K_1 - K_2, K_2, K_1\}$, gdzie K_1 jest kwartyką Komiya-Kuribayashiego. Otrzymany układ, co jest obserwacją ciekawą, jest również wolny, bowiem stowarzyszona algebra Milnora ma rezolwentę postaci

$$0 \to S(-26) \oplus S(-19) \to S^3(-15) \to S.$$

W świetle powyższego twierdzenia, gdyby jego założenia byłyby spełnione, to ponieważ krzywe generujące nasz pęk to kwartyki, zatem powinniśmy uzyskać $\mathrm{mdr}(C_3) = 2\cdot 4 - 2 = 6$. Tymczasem $\mathrm{mdr}(C_3) = 4$. Obserwacja ta prowadzi nas do wniosku, że pęk $\mathcal{P}$ musi zawierać jakiś element niezredukowany. Zauważmy, że takim elementem jest, na przykład, krzywa zadana przez

$$Q_{(4:1)}(x, y, z) = (2x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Co ciekawe, powyższa krzywa jest jedynym elementem niezredukowanym generowanym przez pęk $\mathcal{P}$, co też będziemy chcieli teraz udowodnić.

Stwierdzenie 4.13
Istnieje dokładnie jedna krzywa niezredukowana należąca do pęku $\mathcal{P}\colon uK_1 + vK_2$ *i jest to*

$$K_{(4:1)}\colon (2x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Nasz dowód jest podzielony na kilka kroków. Zaczynamy od następującego ogólnego lematu dotyczącego dowolnego, dopuszczalnego przez nasze założenia ogólne, pęku krzywych.

Stwierdzenie 4.14
Niech $\mathcal{C}_{(a:b)}, \mathcal{C}_{(c:d)}$ *będą różnymi krzywymi z pęku*

$$\mathcal{P}\colon u\mathcal{C}_1 + v\mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2,\ (u : v) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

którego zbiorem punktów bazowych jest $\mathcal{B} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. *Wtedy zbiór puntów wspólnych dowolnych dwóch różnych krzywych z pęku jest równy* $\mathcal{B}$*, tj.*

$$\mathcal{C}_{(a:b)} \cap \mathcal{C}_{(c:d)} = \mathcal{B},\ \textit{jeżeli}\ \mathcal{C}_{(a:b)} \neq \mathcal{C}_{(c:d)}.$$

Dowód. Dla dowodu przyjmujemy następujące oznaczenia dla wielomianów definiujących generatory pęku $\mathcal{P}$, mianowicie

$$\mathcal{C}_1\colon Q_1(x, y, z) = 0 \text{ oraz } \mathcal{C}_2\colon Q_2(x, y, z) = 0.$$

Oznaczmy wielomiany dwóch krzywych z pęku

$$\mathcal{C}_{(a:b)}\colon Q_{(a:b)}(x, y, z) = 0 \text{ oraz } \mathcal{C}_{(c:d)}\colon Q_{(c:d)}(x, y, z) = 0.$$

W pierwszej kolejności pokażemy, że $\mathcal{C}_{(a:b)} \cap \mathcal{C}_{(c:d)} \supseteq \mathcal{B}$. Niech $p \in \mathcal{B}$, wówczas

$$Q_1(p) = Q_2(p) = 0. \tag{4.7}$$

Sprawdzimy teraz wartość wielomianów definiujących krzywe $\mathcal{C}_{(a:b)}$, $\mathcal{C}_{(c:d)}$ w punkcie p. Mamy

$$Q_{(a:b)}(p) = a \cdot Q_1(p) + b \cdot Q_2(p) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

$$Q_{(c:d)}(p) = c \cdot Q_1(p) + d \cdot Q_2(p) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

więc $p \in \mathcal{C}_{(a:b)} \cap \mathcal{C}_{(c:d)}$.

Wykażemy teraz zawieranie w drugą stronę, czyli $\mathcal{C}_{(a:b)} \cap \mathcal{C}_{(c:d)} \subseteq \mathcal{B}$.

Przypuśćmy, że $p \in \mathcal{C}_{(a:b)} \cap \mathcal{C}_{(c:d)}$ i $p \notin \mathcal{B}$, czyli $p \notin \mathcal{C}_1$ lub $p \notin \mathcal{C}_2$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $p \notin \mathcal{C}_1$. Z powyższych warunków wynika

(i) $Q_{(a:b)}(p) = a \cdot Q_1(p) + b \cdot Q_2(p) = 0$,

(ii) $Q_{(c:d)}(p) = c \cdot Q_1(p) + d \cdot Q_2(p) = 0$,

(iii) $Q_1(p) \neq 0$.

Wobec powyższego rozważmy pierwszy przypadek $a \neq 0$. Wówczas korzystając z (i) i (iii), otrzymujemy $Q_2(p) \neq 0$ oraz $\frac{b}{a} = -\frac{Q_2(p)}{Q_1(p)}$. Ponieważ c i d nie mogą być równocześnie równe zero, to z warunku (ii) wynika, że obie te liczby są różne od zera, więc $\frac{d}{c} = -\frac{Q_2(p)}{Q_1(p)}$. Otrzymaliśmy zatem $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\mathcal{C}_{(a:b)} \neq \mathcal{C}_{(c:d)}$.

Pozostaje nam zatem rozważyć drugi przypadek, tj. $a = 0$. Ponieważ $b \neq 0$, bowiem a, b nie mogą być równocześnie równe 0, to na mocy (i) wnioskujemy, że $Q_2(p) = 0$, co na podstawie (ii) i (iii) oznacza, że $c = 0$. Otrzymaliśmy $(0 : b) = (0 : d)$, co znów przeczy założeniu $\mathcal{C}_{(a:b)} \neq \mathcal{C}_{(c:d)}$. ■

Wracamy teraz do sytuacji kwartyki i prostych hiperoskulujących. Zaczynamy od wprowadzenia następującego oznaczenia.

Oznaczenie 4.1

Dla prostych hiperoskulujących l_1, l_2, l_3, l_4 do kwartyki K_1 możemy przyjąć taką numerację punktów ze zbioru $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, że zachodzi

$$l_i \cap K_1 = \{p_i\} \text{ dla } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \tag{4.8}$$

czyli jedynym punktem wspólnym prostej l_i i kwartyki Komiya-Kuribayashiego jest punkt p_i.

Lemat 4.1

Dowolna kwartyka z pęku (generowanego przez krzywe 4.4 oraz 4.5) różna od K_2 ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą z czterech prostych hiperoskulujących l_1, l_2, l_3, l_4 i jest to punkt należący do $\mathcal{B}$. Innymi słowy,

$$l_i \cap K_{(a:b)} = \{p_i\} \textit{ dla } i \in \{1, 2, 3, 4\} \textit{ oraz } K_{(a:b)} \neq K_2.$$

Dowód. W pierwszej kolejności pokażemy, że $l_i \cap K_{(a:b)} \ni p_i$. Wprost z definicji punktu p_i mamy $p_i \in l_i$, zatem wystarczy pokazać, że $p_i \in K_{(a:b)}$. Uwzględniając (4.7), mamy

$$Q_{(a:b)}(p_i) = a \cdot Q_1(p_i) + b \cdot (l_1 l_2 l_3 l_4)(p_i) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

a zatem $p \in K_{(a:b)}$.

Pozostało nam pokazać, że $l_i \cap K_{(a:b)} \subset \{p_i\}$. Niech $p \in l_i \cap K_{(a:b)}$ wtedy $l_i(p) = 0$ i $Q_{(a:b)}(p) = 0$. Z drugiej równości otrzymujemy $0 = Q_{(a:b)}(p) = a \cdot Q_1(p) + b \cdot (l_1 l_2 l_3 l_4)(p) = a \cdot Q_1(p)$. Widać, że $a \neq 0$, bo w przeciwnym przypadku mielibyśmy $K_{(0:b)} = K_2$, co byłoby sprzeczne z założeniem, więc $Q_1(p) = 0$, czyli $p \in l_i \cap K_1$. Ponieważ jedynym punktem wspólnym kwartyki Komiya-Kuribayashiego z prostą l_i jest punkt p_i, zatem $p = p_i$, co kończy dowód. ■

Lemat 4.2
Nie istnieje kwartyka rozkładalna $K_{(a:b)}$ należąca do pęku, różna od K_2, dla której w rozkładzie na składowe nierozkładalne pojawia się prosta. Inaczej mówiąc, nie istnieje punkt $(a : b) \neq (0 : 1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ taki, że

$$K_{(a:b)} \colon l \cdot h = 0, \quad \textit{gdzie } \deg(l) = 1.$$

Dowód. Zauważmy, że $l \neq l_i$. Gdyby $l = l_i$, to wówczas $l_i \subset K_{(a:b)} \cap K_2$, ale ze Stwierdzenia 4.14 wiemy, że $K_{(a:b)} \cap K_2 = \mathcal{B}$. Z drugiej strony, zbiór punktów bazowych to $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, co prowadzi do oczywistej sprzeczności, gdyż $l_i \neq \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Przyjmijmy zatem, że $l \neq l_i$. Niech teraz $\overline{p}_1 = l \cap l_1$ będzie punktem wspólnym prostej l i prostej hiperoskulującej l_1. Wtedy $\overline{p}_1 \in K_{(a:b)}$, bowiem $(lh)(\overline{p}_1) = 0$ oraz $\overline{p}_1 \in K_2$, bowiem $(l_1 l_2 l_3 l_4)(\overline{p}_1) = 0$, czyli na podstawie Stwierdzenia 4.14 punkt $\overline{p}_1 \in \mathcal{B}$. Z drugiej jednak strony, jedynym punktem prostej l_1 należącym do $\mathcal{B}$ jest punkt p_1, więc $\overline{p}_1 = p_1$, czyli ostatecznie punkt p_1 należy do prostej l. Analogicznie można pokazać, że także pozostałe trzy punkty p_2, p_3, p_4 należą do prostej l, co jednakże jest niemożliwe, bowiem punkty p_1, p_2, p_3, p_4 nie są współliniowe, co łatwo sprawdzić. ■

Warto zaznaczyć, że w powyższym dowodzie nie zakładamy nic szczególnego o wielomianie h. W szczególności, z czego będziemy korzystali poniżej, wielomian h może być rozkładalny.

Na podstawie powyższego lematu jest oczywiste, że nie może istnieć kwartyka niezredukowana należąca do pęku opisana przez równanie $l^2 \cdot h_1 = 0$ lub $l^3 \cdot h_1 = 0$ lub $l^4 = 0$, gdzie $\deg(l) = 1$, bo w takim przypadku dałoby się zapisać równanie tej kwartyki w postaci $l \cdot h$, gdzie, odpowiednio, $h = l \cdot h_1$, lub $h = l^2 \cdot h_1$, lub $h = l^3$. Analogicznie, korzystając z podobnej argumentacji jak powyżej, nie może także istnieć kwartyka z pęku o równaniu $s^2 = 0$, gdzie wielomian s jest wielomianem rozkładalnym. Korzystając z tej obserwacji, możemy zapisać następujące stwierdzenie

Lemat 4.3
Każda kwartyka niezredukowana należąca do pęku, o ile istnieje, musi mieć postać

$$K_{(a:b)}\colon s^2 = 0,$$

gdzie s jest nierozkładalnym wielomianem stopnia drugiego.

Przechodzimy zatem do dowodu Stwierdzenia 4.13.

Dowód. Korzystając z Stwierdzenia 4.14 i Lematu 4.1, wnioskujemy, że proste l_1, l_2, l_3, l_4 muszą być styczne do $s = 0$ w punktach p_1, p_2, p_3, p_4. Warunki te pozwalają nam w prosty sposób wyznaczyć jedyny, z dokładnością do przemnożenia przez niezerową stałą, wielomian stopnia drugiego, mianowicie

$$s = 2x^2 + y^2 + z^2,$$

co kończy dowód jedyności kwartyki niezredukowanej w pęku $\mathcal{P}$. ■

W ostatniej części tego rozdziału skupimy się na eksperymentach związanymi z generowaniem wolnych układów z wykorzystaniem opisanych powyżej własności pęku kwartyk $\mathcal{P}$. Na bazie wielu obliczeniach z wykorzystaniem programu `SINGULAR`, można postawić następującą hipotezę.

Hipoteza 4.1
Jeżeli układ krzywych C_2 uzupełnimy o dowolną skończoną liczbę gładkich kwartyk z pęku $\mathcal{P}$, to otrzymany układ krzywych będzie wolny. Co więcej, minimalny stopień nietrywialnych relacji syzygii tak otrzymanego układu będzie stale równy 4.

Wypiszemy teraz wielomiany definiujące kwartyki z pęku, które wykorzystamy w konstrukcji układu C_{40} stopnia 40 zawierającego C_2 jako podukład, mianowicie

(1) $Q_{(1:0)}(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$,

(2) $Q_{(0:1)}(x, y, z) = (-2ix - y + z)(-2ix + y + z)(2ix - y + z)(2ix + y + z)$,

(3) $Q_{(1:-1)}(x, y, z) = -15x^4 - 5x^2y^2 - 5x^2z^2 + 5y^2z^2$,

(4) $Q_{(-16:1)}(x, y, z) = -40x^2y^2 - 15y^4 - 40x^2z^2 - 50y^2z^2 - 15z^4$,

(5) $Q_{(1:1)}(x, y, z) = 17x^4 + 11x^2y^2 + 2y^4 + 11x^2z^2 + y^2z^2 + 2z^4$,

(6) $Q_{(1:2)}(x,y,z) = 33x^4 + 19x^2y^2 + 3y^4 + 19x^2z^2 - y^2z^2 + 3z^4$,

(7) $Q_{(1:3)}(x,y,z) = 49x^4 + 27x^2y^2 + 4y^4 + 27x^2z^2 - 3y^2z^2 + 4z^4$,

(8) $Q_{(1:4)}(x,y,z) = 65x^4 + 35x^2y^2 + 5y^4 + 35x^2z^2 - 5y^2z^2 + 5z^4$,

(9) $Q_{(1:5)}(x,y,z) = 81x^4 + 43x^2y^2 + 6y^4 + 43x^2z^2 - 7y^2z^2 + 6z^4$,

(10) $Q_{(1:6)}(x,y,z) = 97x^4 + 51x^2y^2 + 7y^4 + 51x^2z^2 - 9y^2z^2 + 7z^4$.

Można sprawdzić dość standardowym rachunkiem, że C_{40} jest układem wolnym, z czego będziemy korzystać za moment. Krzywa K_2 to kwartyka rozkładalna składająca się z czterech prostych hiperoskulujących do kwartyki Komiya-Kuribayashiego, wobec czego z każdego z rozpatrywanych układów C_2, C_3, i C_{40}, w których skład wchodzą cztery proste hiperoskulujące, możemy usunąć po jednej z nich, otrzymując nowe układy niższego stopnia. Procedura ta znana jest w literaturze jako *deletion technique* i jest ona niezwykle istotna w kontekście następującego twierdzenia, które zostało niedawno udowodnione przez Dimcę oraz Măcinic i Pokorę [9, 23].

Twierdzenie 4.2
Niech $\mathcal{C}$ będzie zredukowaną wolną krzywą płaską i niech $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup L$ dla pewnej prostej L takiej, że $L \not\subset \mathcal{C}'$. Wówczas $\mathcal{C}'$ jest albo wolna, albo plus-jeden generowana.

W świetle powyższego twierdzenia, jeżeli usuniemy prostą z układów C_2, C_3, C_{40}, to wówczas możemy uzyskać układ, który jest albo wolny, albo plus-jeden generowany. Korzystając z obliczeń w programie `SINGULAR`, możemy zweryfikować następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.15
Usunięcie hiperoskulującej prostej $\ell\colon -2ix - y + z = 0$ z któregokolwiek z układów C_2, C_3, C_{40} prowadzi nas do nowych wolnych układów krzywych C_2', C_3', C_{40}'.

Dowód. Opieramy się na obliczeniach symbolicznych z wykorzystaniem program `SINGULAR`. Dowód polega na wypisaniu minimalnych rezolwent wolnych stowarzyszonych algebr Milnora. Zaczynamy od układu C_2', dla którego możemy wyznaczyć następującą rezolwentę:

$$C_2'\colon \quad 0 \to S(-16) \oplus S(-14) \to S(-10)^3 \to S,$$

wobec czego układ C_2' jest wolny o wykładnikach $(d_1, d_2) = (4, 6)$.

Przechodzimy do układu C_3'. W tym przypadku mamy następującą rezolwentę:

$$C_3'\colon \quad 0 \to S(-24) \oplus S(-18) \to S(-14)^3 \to S,$$

wobec czego układ C_3' jest wolny o wykładnikach $(d_1, d_2) = (4, 10)$.

W końcu przechodzimy do ostatniego rozważanego układu C'_{40}. Mamy następującą rezolwentę wolną:

$$C'_{40}: \quad 0 \to S(-72) \oplus S(-42) \to S(-38)^3 \to S,$$

wobec czego układ C'_{40} jest wolny o wykładnikach $(d_1, d_2) = (4, 34)$. ■

Literatura

[1] V. I. Arnold, Local normal forms of functions. *Invent. Math.* **35**: 87–109 (1976).

[2] M. Barakat, L. Kühne, Computing the nonfree locus of the moduli space of arrangements and Terao's freeness conjecture. *Math. Comp.* **92**: 1431–1452 (2023).

[3] R. Bix, *Conics and Cubics. A concrete introduction to algebraic curves.* 2nd ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer (ISBN 0-387-31802-X/hbk). viii, 346 p. (2006).

[4] R. Bojanowski. *Zastosowania uogólnionej nierówności Bogomolova-Miyaoka-Yau.* Praca Magisterska UW, `http://www.mimuw.edu.pl/%7Ealan/postscript/bojanowski.ps`, 2003.

[5] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann, Singular 4-1-1 — Acomputer algebra system for polynomial computations. `http://www.singular.uni-kl.de`, 2018.

[6] A. Dimca, Freeness versus maximal global Tjurina number for plane curves, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **163**: 161–172 (2017).

[7] A. Dimca, *Hyperplane Arrangements: An Introduction*, Universitext, Springer-Verlag, 2017.

[8] A. Dimca, Curve arrangements, pencils, and Jacobian syzygies. *Michigan Math. J.* **66**: 347–365 (2017).

[9] A. Dimca, On free and plus-one generated curves arising from free curves by addition-deletion of a line. **arXiv:2310.08972**.

[10] A. Dimca, G. Ilardi, P. Pokora. G. Sticlaru, Construction of free curves by adding lines to a given curve. *Results Math.* **79(1)**: Paper No. 11, 31 pages (2024).

[11] A. Dimca, M. Janasz, and P. Pokora, On plane conic arrangements with nodes and tacnodes. *Innov. Incidence Geom.* **19(2)**: 47–58 (2022).

[12] A. Dimca and P. Pokora, Maximizing curves viewed as free curves. *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2023(22)**: 19156–19183 (2023).

[13] A. Dimca and G. Sticlaru, Plane curves with three syzygies, minimal Tjurina curves, and nearly cuspidal curves. *Geom. Dedicata*: **207**: 29–49 (2020).

[14] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[15] A. A. Du Plessis and C. T. C. Wall, Application of the theory of the discriminant to highly singular plane curves. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **126(2)**: 259–266 (1999).

[16] W. L. Edge, A plane quartic curve with twelve undulations. *Edinburgh Math. Notes* **35**: 10–13 (1945).

[17] F. Hirzebruch. Arrangements of lines and algebraic surfaces. *Arithmetic and geometry, Vol.II, Progr. Math., vol.* **36**, Birkhäuser Boston, Mass.: 113–140 (1983).

[18] A. Hurwitz. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Math. Ann.* **41(3)**: 403–442 (1892).

[19] M. Janasz, P. Pokora, and M. Zieliński, On arrangements of smooth plane quartics and their bitangents. **arXiv:2308.16514**.

[20] E. Kunz, *Introduction to Plane Algebraic Curves.* Birkhäuser, Basel (2005).

[21] A. Kuribayashi and K. Komiya, On Weierstrass points and automorphisms of curves of genus three. *Algebraic geometry, Proc. Summer Meet., Copenh. 1978, Lect. Notes Math.* **732**: 253–299 (1979).

[22] A. Langer, Logarithmic orbifold Euler numbers of surfaces with applications. *Proc. London Math. Soc.* **86**: 358–396 (2003).

[23] A. Măcinic, P. Pokora, Addition-deletion results for plus-one generated curves. **arXiv:2310.19610**.

[24] G. Megyesi, Configurations of conics with many tacnodes, *Tohoku Math. J.* **52(4)**: 555–577 (2000).

[25] Y. Miyaoka, The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. *Math. Ann.* **268**: 159–171 (1984).

[26] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[27] U. Persson, Horikawa surfaces with maximal Picard numbers. *Math. Ann.* **259**: 287–312 (1982).

[28] P. Pokora, On free and nearly free arrangements of conics admitting certain ADE singularities. *Ann Univ Ferrara* (2023). `https://doi.org/10.1007/s11565-023-00481-6`.

[29] H. Reiffen, Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen. *Math. Z.* **101**: 269–284 (1967).

[30] C. Salgado, D. Testa, A. Várilly-Alvarado, On the unirationality of del Pezzo surfaces of degree 2. *J. Lond. Math. Soc., II.Ser.* **90(2)**: 121–139 (2014).

[31] H. Schenck and Ş. Tohăneanu, Freeness of conic-line arrangements in $\mathbb{P}^2$. *Comment. Math. Helv.* **84(2)**: 235–258 (2009).

[32] M. Zieliński, On plane conic arrangements with A_5 and and A_7 singularities. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser* **73(1)**: 57–63 (2024).

[33] J. Wahl. Miyaoka-Yau inequality for normal surfaces and local analogues. Ciliberto, Ciro (ed.) et al., *Classification of algebraic varieties. Algebraic geometry conference on classification of algebraic varieties, May 22-30, 1992, University of L'Aquila, L'Aquila, Italy. Providence, RI: American Mathematical Society. Contemp. Math.* 162, 381–402 (1994).

Dodatek A

W tym dodatku przedstawiamy kod pozwalający na wypisanie rozwiązań układu równań diofantycznych (△) ze strony 24.

```
def solve():
    # Equation system coefficients:
    A1 = [1, 3, 4, 5, 7]
    B1 = 37
    A2 = [1, 2, 3, 3, 4]
    B2 = 24

    # Bounds for every variable:
    BOUNDS = [25,13,9,9,7]

    #Array for saving found solutions:
    SOLUTIONS = []

    #Function for checking if given vector X is a solution:
    def test_solution(X):
        nonlocal A1,B1,A2,B2, SOLUTIONS
        res1 = 0
        res2 = 0
        for i in range(5):
            res1+= A1[i]*X[i]
            res2+= A2[i]*X[i]
        if res1==B1 and res2==B2:
            SOLUTIONS.append(X.copy())


    def rec(iter,X):
        nonlocal A1,B1,A2,B2, BOUNDS
        if iter == 5:
            test_solution(X)

        else:
            for val in range(BOUNDS[iter]):
                X[iter] = val
```

```
                    rec(iter+1,X)

    #Checking all posibilites:

    rec(0,[0,0,0,0,0])
    return SOLUTIONS

print(solve())
```

Dodatek B

W tym dodatku przedstawiamy kod pozwalający na weryfikację ostatniej części dowodu Stwierdzenia 4.3 odnośnie braku rozwiązań układu równań diofantycznych (□) ze strony 43.

```
def solve():
    # Equation system coefficients:
    A1 = [1,2,3,3,4,4,5,6]
    B1 = 8
    A2 = [1,3,4,5,6,7,8,10]
    B2 = 19

    # Bounds for every variable:
    BOUNDS = [9,5,3,3,3,3,2,2]

    #Array for saving found solutions:
    SOLUTIONS = []

    #Function for checking if given vector X is a solution:
    def test_solution(X):
        nonlocal A1,B1,A2,B2, SOLUTIONS
        res1 = 0
        res2 = 0
        for i in range(6):
            res1+= A1[i]*X[i]
            res2+= A2[i]*X[i]
        if res1==B1  and res2==B2:
            SOLUTIONS.append(X.copy())


    def rec(iter,X):
        nonlocal A1,B1,A2,B2, BOUNDS
        if iter == 6:
            test_solution(X)

        else:
            for val in range(BOUNDS[iter]):
```

```
                X[iter] = val
                rec(iter+1,X)

    #Checking all posibilites:

    rec(0,[0,0,0,0,0,0])
    if len(SOLUTIONS)==0:
        return "No solutions found."
    return SOLUTIONS

print(solve())
```