Warszawa, 14 sierpnia 2024

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MARCINA ZIELIńSKIEGO

MACIEJ BORODZIK

Przedłożona rozprawa doktorska spełnia z nawiązką ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Uzasadnienie

Przedstawienie tematyki. Praca doktorska mgr. Zielińskiego dotyczy badania własności konfiguracji krzywych na płaszczyźnie. Z taką konfiguracją można związać dane kombinatoryczne: graf incydencji, którego wierzchołkami są punkty przecięcia, a krawędzie odpowiadają krzywym. Mniej subtelnym niezmiennikiem jest liczba osobliwości różnych od zwykłych punktów podwójnych, na przykład punktów potrójnych, osobliwości typu D_4, osobliwości typu punkt wielokrotny, które nie są kwazijednorodne.

Głównym pytaniem w dziedzinie jest odwrócenie kolejności. Czy graf incydencji jest realizowany przez konfigurację? Czy ta realizacja jest jednoznaczna? Czy pewne własności konfiguracji (np. pierwsza liczba Bettiego dopełnienia) dają się wyznaczyć przez kombinatorykę grafu? Jest to jedna z inkarnacji ogólnego pytania w geometrii algebraicznej: na ile własności topologiczne wyznaczają własności algebraiczne. Zaś szczególnym przypadkiem problemu, omawianym w pracy na bazie kilku przykładów jest hipoteza Terao o wolności.

Za twierdzenie początkujące badanie konfiguracji linii i stożkowych uważa się powszechnie twierdzenie Pascala o sześciu punktach na stożkowej.

Stosowane w tematyce metody zawierają cały wachlarz technik. Część z nich jest czysto algebraiczna: nierówności typu BMY, formuła na genus, twierdzenia o znikaniu, twierdzenia typu Riemanna–Rocha. Zaskakująco dużo mówi o problemach topologia. Mówimy tutaj choćby o badaniu grupy podstawowej dopełnienia (klasyczny przykład Zariskiego) czy to bezpośrednio, czy przez techniki zapożyczone z teorii węzłów: grupy homologii nakryć rozgałęzionych czy wielomian Alexandera konfiguracji są de facto zgrabnymi i wygodnymi metodami badania niższego ciągu centralnego grupy podstawowej. Metody badania flag związanych z konfiguracją, rozwinięte przez Orlika i Salomona dają kolejny impuls do badania konfiguracji.

Struktura pracy. Jak łatwo zauważyć, praca nosi tytuł „Geometryczne i homologiczne własności układów gładkich krzywych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Liczy 64 strony podzielone na 4 rozdziały i dodatek. Pierwszy rozdział jest wprowadzeniem, drugi oparty jest o samodzielną pracę doktoranta [32].[1] Trzeci rozdział oparty jest o wyniki wspólne z Janaszem i promotorem [19], załadowane na arxiv w 2023 roku. Czwarty rozdział jest, jak rozumiem, niepublikowany. Do pracy doktorskiej dołączono oświadczenie o pracy [19], z którego wynika, że wkład doktoranta w pracę [19] jest istotny.

Rozdziały są powiązane tematycznie, niemniej można je czytać niezależnie od siebie. Rozdział drugi podaje przeszkody do istnienia konfiguracji o zadanej liczbie osobliwości. W rozdziale trzecim autor bada układy prostych i kwartyk poprzez analizę bistycznych do układu. Rozdział czwarty zawiera nowe przykłady konfiguracji i analizę ich w kontekście hipotezy Terao.

Wstęp do pracy daje bardzo dobre wprowadzenie do opisu wyników. Pierwszy rozdział opisuje stosowane techniki. Brakuje osadzenia ich w szerszym kontekście, jakkolwiek rozdział jest napisany poprawnie. Literatura jest, jak na tę tematykę, przedstawiona raczej ubogo. 33 pozycje jak na pracę doktorską to zdecydowanie mało; autor mógłby dodać więcej cytowań w rozdziale pierwszym, lepiej umieszczając swoje wyniki w szerszym kontekście. Na uwagę zwraca dość duża liczba cytowanych preprintów a także nowych (opublikowanych po 2020 roku) prac. Wskazuje to na dużą dynamikę dyscypliny.

Metodyka pracy. Praca skupia się na wykorzystaniu orbifoldowej nierówności log-BMY udowodnionej przez Langera. Jakkolwiek sam dowód nierówności jest bardzo techniczny, to sformułowanie daje gotowy do użytku wynik, podobnie zresztą jak w przypadku klasycznej nierówności log-BMY. Główne wyniki w pracy są oparte o tę nierówność, zarówno w rozdziale 2 jak i rozdziale 3. Autor wykorzystuje również intensywnie program singular do obliczeń symbolicznych. Autor nie rozwija nowych metod, ale wykorzystuje klasyczne już techniki. Jednak nie każda praca badawcza musi tworzyć nowe metody.

Interesujące są przykłady konstrukcji wolnych i prawie-wolnych układów w rozdziale czwartym. Tutaj zastosowany jest ogólny schemat, że szczególne przypadki niskiego stopnia są punktem wyjścia do tworzenia ogólnych przykładów. Autor tworzy przykłady na bazie kwartyk Kleina i Komiya-Kuribayahiego oraz bistycznych do nich, po czym używa komputera do obliczania rezolwent i pokazania, że pewne układy są wolne.

Uzyskane wyniki. W rozdziale 2 autor dowodzi twierdzenia A, podającego nierówności między liczbą osobliwości ustalonych typów dla układu stożkowych. Jest to wzmocnienie nierówności uzyskanej przez Miyaokę. Autor pokazuje przykłady w

[1]Numeracja odnośników z pracy.

niskich stopniach, gdzie ta nierówność jest optymalna. Jak podano wyżej, główne metody to nierówność log-BMY.

Rozdział trzeci dotyczy układu prostych i kwartyk. Podobna nierówność do twierdzenia A (twierdzenie B) jest uzyskana, jeśli stopień jest co najmniej 6. Twierdzenie B jest dalej wykorzystywane do badania układu: kwartyka i proste bistyczne. Autor bada bistyczne dla kwartyki Dycka, Kleina i Komiya-Kuribayashiego stosując kod w programie singular (Stwierdzenia 3.4, 3.5 i 3.6), a następnie przechodzi do ogólnych kwartyk (Stwierdzenie 3.7), które stosuje twierdzenie B.

Rozdział czwarty podaje różne częściowe wyniki dla układów niskich stopni. Rozpoczyna się on od badania wolności układów jednej kwartyki i jednej lub dwóch prostych. Następnie autor bada wolność układów typu: kwartyka Dycka, Kleina lub Komiya-Kuribayashiego plus pewne bistyczne. O ile w rozdziale trzecim celem było znajdowanie liczby punktów o zadanych osobliwościach, to w rozdziale czwartym badana jest lokalna wolność układu.

Mankamenty. Jako że dwa rozdziały badawcze z trzech są na podstawie artykułów badawczych, autor mógł czuć mniejszą motywację do przepisania tych wyników do doktoratu. Ten brak motywacji widać w redakcji. Praca jest na poziomie ogólnym zredagowana bardzo dobrze, ale szczegóły wymagałyby przejrzenia. Dotyczy to zarówno łagodnych problemów merytorycznych, jak i redakcyjnych. Przykładowo, dodatki z programami komputerowymi są podane w rozdziale o tytule 'Literatura' (w nagłówku strony).

Z drugiej strony mamy problemy trochę poważniejsze, nie zmieniające jednak oceny pracy. Autor stosując nierówność log-BMY (np. na dole strony 20) nakłada ograniczenia na α związane z efektywnością rozwiązania αC. Na stronie 20 jest to $\alpha \geq \frac{3}{2k}$. Przy dowodzie twierdzenia 3.1, mamy $4k + d \geq 6$. Tylko że autor nigdzie nie tłumaczy, w jaki sposób efektywność układu przekłada się na globalny parametr α. Te ograniczenia na α są różne od lokalnych ograniczeń związanych z konkretną osobliwością.

Osobnym problemem jest nieco nadmierne użycie komputera. Na stronie 44 autor podaje układ równań i używa komputera aby pokazać, że nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych nieujemnych. To się da zrobić w dwóch linijkach. Odejmując drugie równanie od pierwszego mamy

$$11 = t_3+n_3+2t_5+2d_6+3d_7+3d_8+4d_{10} < n_2+2t_3+3t_5+4d_6+4d_7+5d_8+6d_{10} = 8,$$

gdzie nierówność wynika z założenia, że wszystkie wyrazy są nieujemne. Przy okazji rozwiązujemy problem w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

Ponadto praca z komputerem w rozdziale czwartym nie jest szczególnie ciekawa. Wynik: weźmy kwartykę, jej bistyczne, wstawmy do programu i zobaczmy co wyjdzie, jest strategią dobrą na tworzenie przykładów, jednak w pracy doktorskiej oczekujemy nieco więcej. Rozdział czwarty jest de facto na poziomie licencjatu i odstaje merytorycznie od pozostałych.

Ocena końcowa. Autor wykazał się opanowanie wystarczającej ilości technik właściwych podjętej tematyce i umiał je zastosować w rozwiązaniu konkretnych problemów. Uzyskane wyniki (twierdzenie A i twierdzenie B ze wstępu) są publikowalne lub już opublikowane i mają ciężar wystarczający do pracy doktorskiej. Rozdział 3 jest oparty o wspólną pracę z Janaszem i Pokorą. W świetle załączonego oświadczenia, a także mając na uwadze powiązanie wyników z rozdziału 3 z resztą pracy, należy uznać wkład Zielińskiego w uzyskanie tych wyników jako zdecydowanie istotny.

Dodatkowe przykłady omówione w rozdziale czwartym, jakkolwiek samodzielnie nie wystarczyłyby na doktorat, stanowią interesujący dodatek wskazujący, jak można szukać przykładów układów wolnych, prawie-wolnych oraz niespełniających tych kryteriów.

Praca spełnia z nawiązką wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Kwestię wyróżnienia wolałbym podjąć w dyskusji w komisji, ze względu na istotne różnice w kryteriach przyznawaniu wyróżnień w różnych jednostkach.

Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, ul Śniadeckich, Warsaw, Poland

Email address: `mcboro@mimuw.edu.pl`

Qualified electronic signature

Maciej Borodzik
PNOPL-79012500895
19.08.2024, 11:12:50

Signed on the platform AUTENTI