

prof. Sławomir Rams
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Kraków, 2 czerwca 2026

Recenzja pracy doktorskiej Pana magistra Łukasza Merty
” *Geometric properties of arrangements of low-degree curves* .”

Przedstawienie Autora Rozprawy: Pan Łukasz Merta w latach 2012-2017 studiował matematykę na Uniwersytecie Jagiellońskim. W roku 2015 uzyskał stopień licencjata na podstawie pracy ”Teoria gry Lights Out” napisanej pod kierunkiem dr. hab. Marcina Dumnickiego w ramach MSMP. Następnie uzyskał tytuł magistra na podstawie pracy ”Composition inverses of certain automatic power series” napisanej pod kierunkiem dr. Jakuba Byszewskiego. Potem rozpoczął studia doktoranckie na WMiI UJ. Z tego okresu pochodzą dwie publikacje autorstwa pana Merty (w Theoret. Comput. Sci i Discrete Math. Theor. Comput. Sci.). Pan Merta przerwał studia doktoranckie na UJ w roku 2023.

Od 2021 roku pan magister Łukasz Merta pracuje jako asystent w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. W roku 2025 w czasopiśmie z listy filadelfijskiej ukazały się dwie publikacje, których jest współautorem.

Dyskusja rozprawy: W swojej pracy doktorskiej pan magister Łukasz Merta bada pewne własności geometryczne konfiguracji krzywych niskich stopni na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Tej bardzo klasycznej tematyce poświęcone są prace matematyków tej miary co Plücker, Bézout, Cayley, Sylvester (przypadek rzeczywisty) czy Edge. Klasyfikacja osobliwości, nowoczesne techniki geometrii algebraicznej, algebry homologicznej i postępy w metodach efektywnych algebry doprowadziły w ostatnich dekadach do wielu ciekawych wyników w tej teorii (patrz bibliografia w książce A. Dimci ”Hyperplane arrangements” z 2017 roku). Istotnym narzędziem, które pchnęło tę teorię na nowe tory są systemy algebry komputerowej (w rozprawie autor istotnie korzysta z programu Singular).

Promotorem recenzowanej pracy jest profesor Tomasz Szemberg, który od wielu lat prowadzi badania nad problemami z tej tematyki (we współpracy z badaczami tej klasy co B. Harbourne i Th. Bauer), dlatego przyjmuję, że wybór badanych w rozprawie konfiguracji motywowany jest szerszym programem badawczym realizowanym pod kierownictwem prof. Szemberga przez grupę geometrów algebraicznych na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie i pełne zrozumienie własności tych konfiguracji jest ważne dla dalszego rozwoju teorii.

Praca pana Merty składa się ze Wstępu, pięciu rozdziałów (z których ostatni ma podtytuł "Appendix") oraz krótkiej bibliografii. Poniżej krótko omawiam zawartość poszczególnych części rozprawy.

W bardzo krótkim Wstępie pan Merta omawia strukturę recenzowanej rozprawy, wymienia wyniki przedstawione w jej poszczególnych rozdziałach (bez podawania dokładnych referencji do dalszych części pracy) i wyjaśnia gdzie niektóre z przedstawionych rezultatów zostały już opublikowane.

W *Rozdziale 1* autor przypomina podstawowe definicje (przestrzeń rzutowa, osobliwość krzywej, krotność osobliwości, styczna) a następnie zbiera pewne bardziej złożone fakty, które są potrzebne dla lektury następnych rozdziałów pracy (między innymi definiuje punkt sextatyczny (ang. sextatic point), derywację logarytmiczną (ang. logarithmic derivation), krzywe wolne (ang. free curves)). Niestety, rozdział ten jest dość krótki i nie uważam, żeby istotnie ułatwiał dalszą lekturę rozprawy. Na obronę autora należy stwierdzić, że podaje on także referencje, które mają ułatwić lekturę rozprawy (wybór referencji jest wszakże dość oszczędny: dla przykładu brak odwołań do wymienianej już przeze mnie książki Dimci z 2017 roku).

Obliczenia niezbędne do uzyskania wyników rozprawy prowadzone były za pomocą programu Singular i trzeba pochwalić autora za bardzo dobre przedstawienie w *Rozdziale 5* (Appendix) skryptów w Singularze. To precyzyjne przedstawienie użytych technik komputerowych bardzo pomaga przy czytaniu dowodów w recenzowanej pracy doktorskiej. Natomiast rozprawa nie zawiera dyskusji relacji między wynikami autora a ogólnym rozwojem teorii (dla przykładu autor nie wzmiankuje nawet pracy Giosué Muratore "Relative Gromov–Witten and maximal contact conics" z 2025 roku), czy bardziej klasycznymi rezultatami (co jest także widoczne w minimalistycznej bibliografii, która liczy zaledwie 27 pozycji). Nie wspomniano także technik teorii krat i wyników Shimady, które poprzez analizę osobliwości podwójnej sekstyki $K3$, pozwalałyby na dowodzenie pewnych wyników *Rozdziału 4* innymi metodami. Sądzę, że głębsza dyskusja szerszego kontekstu w jakim można usytuować wyniki pracy doktorskiej mogłaby pojawić się w jej wstępie lub pierwszym rozdziale.

Głównym tematem *Rozdziału 2* są krzywe Fermata (ze szczególnym naciskiem na kubikę Fermata). Pan Merta używa drugiego Hesjanu, żeby podać współrzędne punktów sextatycznych na krzywej Fermata dowolnego stopnia (Proposition 2.2). Następnie używa division polynomials, żeby obliczyć współrzędne punktów sextatycznych i typu 9 na kubice Fermata. Ponadto opisuje pewne własności geometryczne konfiguracji tych punktów (dyskusja konfiguracji linii zawierających trójki punktów po Proposition 2.5). W dalszej części *Rozdziału 2* pan Merta podaje kryterium na istnienie stożkowej kontaktu trzy przez dwa punkty sextatyczne (odp. typu 9) na kubice Fermata (Proposition 2.6) i algorytm pozwalający na znalezienie takich stożkowych. Skuteczność powyższego algorytmu jest pokazana w Example 2.7. Następnie autor rozprawy opisuje różne aspekty konfiguracji specjalnych bistycznych stożkowych w *Podrozdziale 2.4* i znajduje kubiki styczne do kubiki Fermata

z krotnością dziewięć w punkcie typu 9. Należy podkreślić, że większość wyników z tego rozdziału rozprawy została opublikowana w Journal of Algebra (jako część pozycji [MZ25a] w bibliografii rozprawy).

W *Rozdziale 3* autor bada konfiguracje stycznych do kwartyki Fermata F_4 w punktach maksymalnej styczności (ang. maximal tangency points). Pan Merta uzyskuje pewne własności punktów osobliwych konfiguracji (ang. arrangement) tych dwunastu linii (Proposition 3.3 i 3.4). Następnie dowodzi analogicznych rezultatów dla kwartyki Komiyi-Kuribayashiego K w Podrozdziale 3.3. Wiadomo, że kwartyki Fermata i Komiyi-Kuribayashiego to jedyne krzywe gładkie stopnia cztery z dokładnie dwunastoma liniami maksymalnej styczności (patrz [KK79] w bibliografii recenzowanej rozprawy). Naturalnym jest więc pytanie czy te krzywe, odpowiednio zdefiniowane przez nie konfiguracje punktów lub linii, są powiązane jakąś naturalną zależnością. Wyniki tego rozdziału pozwalają na wykluczenie wielu naturalnych hipotez, ale autor wykazuje pewną zależność między punktami maksymalnej styczności na kwartyce K a liniami maksymalnej styczności na kwartyce Fermata F_4 (patrz strona 36 recenzowanej pracy). Reszta *Rozdziału 3* poświęcona jest punktom sextatycznym i konfiguracjom stożkowych bistycznych do krzywych F_4 i K . Pewne wersje rezultatów z tego rozdziału rozprawy zostały opublikowane w Periodica Mathematica Hungarica (jako część pozycji [MZ25b] w bibliografii rozprawy).

Tematem *Rozdziału 4* rozprawy są wolne konfiguracje trzech gładkich stożkowych z osobliwościami typu A-D-E na rzutowej płaszczyźnie zespolonej. Autor zbiera główne narzędzia (Twierdzenie Du Plessisa-Walla, lista typów osobliwości, wyniki o konfiguracjach dwóch stożkowych z osobliwościami typu A_3 , A_5 i A_7) w pierwszych dwóch porozdziałach tej części pracy. Następnie pan Merta podaje charakteryzację słabych kombinatoryk wolnych konfiguracji trzech stożkowych (Theorem 4.5), wyklucza realizację geometryczną pewnych słabych kombinatoryk (częściowo pomijając szczegóły i cytując pracę [MZZ25], której jest współautorem) i w ten sposób dowodzi, że tylko sześć słabych kombinatoryk może mieć geometryczną realizację. Następnie pan Merta precyzyjnie charakteryzuje/opisuje konfiguracje, które realizują sześć słabych kombinatoryk (Proposition 4.11, 4.12, 4.14, 4.16, 4.18, 4.19). Naturalną konsekwencją tej klasyfikacji jest odpowiedź na pytanie o geometryczną realizację charakterystyk nad ciałem liczb rzeczywistych (Example 4.13, 4.15, 4.17, uwaga przed Proposition 4.19). Uważam, że mimo pozornej prostoty, metody z tego rozdziału są ciekawe i nie tylko prowadzą do pełnej charakteryzacji badanej klasy konfiguracji, ale mogą w przyszłości prowadzić na uzyskanie wyników o większej ogólności.

W *Rozdziale 5* (Appendix) rozprawy zebrano skrypty (w programie Singular), które są wykorzystane w recenzowanej rozprawie. Rozprawę kończy zwięzła bibliografia, w której zebrano tytuły 27 pozycji.

Podsumowując, tematyka pracy doktorskiej Pana magistra Łukasza Merty jest obecnie obiektem intensywnych badań. W rozprawie zostały przedstawione oryginalne wyniki stanowiące użyteczny wkład w aktualny poziom wiedzy. *Rozdziały*

drugi i trzeci recenzowanej pracy doktorskiej nie zawierają istotnie nowych metod, ale pan Merta wykazał się w nich znajomością już istniejących narzędzi badawczych dostateczną dla uzyskania ciekawych wyników, co jest wystarczające w przypadku rozprawy doktorskiej. O randze tych wyników świadczy publikacja w renomowanych czasopiśmie z listy filadelfijskiej. Przedstawione w tych rozdziałach rezultaty powinny być użyteczne przy badaniu konfiguracji hiperpowierzchni. Najwyżej oceniam Rozdział 4 recenzowanej rozprawy. Przedstawione w nim wyniki są ciekawe i mogą stanowić punkt wyjścia do dalszych badań. Zwłaszcza, że stosowane metody powinny dać się uogólnić przy pomocy bardziej technicznych narzędzi.

Rozprawa jest zredagowana starannie, choć moim zdaniem Autor mógł poświęcić więcej czasu na redakcję Rozdziału Pierwszego. Nie udało mi się znaleźć wielu literówek ani żadnych błędów. Głównym mankamentem pracy pana Merty jest brak dokładniejszego odniesienia do bogatej klasycznej literatury na temat krzywych stopnia sześć (naturalnym jest pytanie na ile pewne wyniki Rozdziału 5 wynikają z obszernej literatury na temat geometrii podwójnych sekstyk). **Ten mankament nie zmienia jednak mojej ogólnej oceny rozprawy pana Merty, która jest pozytywna.**

Znalezione przejęzyczenia:

- na stronie 13, linia 6: jest "Fermat conic", powinno być "Fermat cubic".
- na stronie 21, linia 19: jest " $\mathbb{K}[x, y]$ ", powinno być " $\mathbb{C}[x, y]$ ",
- na stronie 45, linia 12: należy dołożyć "at a given point" pomiędzy "A-D-E singularities" a "in such configurations".

Nie znalazłem żadnego błędu w rozprawie i uważam, że nie wymaga ona żadnych korekt merytorycznych.

Konkluzja: Rozprawa doktorska Pana magistra Łukasza Merty

"Geometric properties of arrangements of low-degree curves"

spełnia wymogi dotyczące rozprawy doktorskiej zawarte w Ustawie "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" z dnia 20 lipca 2018 roku. Wnioskuje o dopuszczenie Pana magistra Łukasza Merty do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

(Sławomir Rams)