

prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 8 października 2023

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Pawła Wójcika

1. INFORMACJE OGÓLNE

Pan Paweł Wójcik ukończył matematykę na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie w roku 2009 i uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach w roku 2014. Jest pracownikiem UP od roku 2011; w latach 2018-19 odbył staż naukowy w Instytucie Matematyki UŚ.

W trwającym postępowaniu habilitacyjnym dr Wójcik przedstawił, jako swoje osiągnięcie naukowe, cykl 12 artykułów naukowych opatrzony tytułem

Zastosowanie pochodnych norm i przybliżonych ortogonalności w Geometrii Przestrzeni Banacha.

Publikacje te ukazały się w latach 2013–23; w czterech z nich habilitant jest współautorem, a pozostałe osiem to jego samodzielne prace.

Jak to sugeruje tytuł osiągnięcia naukowego, prace cyklu dotyczą pewnych zagadnień z zakresu z geometrii przestrzeni unormowanych; podstawowym obiektem badań jest pojęcie ortogonalności w sensie Birkhoffa i jego asymptotyczne wersje oraz kierunkowe pochodne normy.

2. NOTATKI Z LEKTURY

2.1. B-ortogonalność. Relacja $x \perp_B y$ dla wektorów z unormowanej przestrzeni zdefiniowana jest przez warunek

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \text{ dla każdego skalara } \lambda.$$

Następująca relacja przybliżonej ortogonalności (dla $0 \leq \varepsilon < 1$)

$$x \perp_B^\varepsilon y \iff \|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\varepsilon\|x\|\|\lambda y\|$$

została wprowadzona przez Chmielińskiego i związana jest z naturalnymi własnościami normy pochodzącej od iloczynu skalarnego.

W pierwszej części pracy (1-N) jej autorzy dowodzą między innymi, że warunek $x \perp_B^\varepsilon y$ jest w przypadku rzeczywistym równoważny z istnieniem funkcjonału φ o normie 1, który

wybija normę x i spełnia warunek $|\varphi(y)| \leq \varepsilon \|y\|$; jest to naturalne uogólnienie twierdzenia Jamesa charakteryzującego relację $\perp_B$. Wynik ten jest następnie zastosowany do stosunkowo klarownych charakteryzacji asymptotycznej ortogonalności operatorów na rzeczywistej przestrzeni Hilberta (przy zwartości jednego z nich) oraz prostego opisu takiej relacji dla pewnych par funkcji z przestrzeni Banacha funkcji ciągłych.

Wspomniane wyżej uogólnienie twierdzenia Jamesa zostało uzupełnione w samodzielnej pracy (6-N) o przypadek zespolony — w konstrukcji stosownego funkcjonału φ autor wykorzystał pewne własności $*$ -słabych topologii.

Cykl czterech prac (1,3,6,8-N) omawia szereg aspektów asymptotycznej ortogonalności. Na przykład z uwagi na częstą niesymetryczność relacji $\perp_B$, rozważa się współczynnik przybliżonej symetrii $S(X)$: kres dolny $\varepsilon > 0$, dla których $x \perp_B y$ implikuje $y \perp_B^\varepsilon x$ dla wszystkich x, y . Ta wielkość jest dość techniczna, ale wykazuje interesujące związki z innymi, dobrze znanymi wielkościami, na przykład $S(X) \leq S(X^*) + R(X)$ dla dowolnej przestrzeni refleksywnej X ; tutaj $R(X)$ oznacza supremum długości odcinków zawartych w sferze jednostkowej X (w szczególności $S(X) = 0$ dla ściśle wypukłej przestrzeni X).

2.2. Samosprężenie w przestrzeniach Banacha. Jednym z podstawowych narzędzi pojawiających się w pracach habilitanta są kierunkowe pochodne normy w przestrzeni Banacha; w szczególności wielkość

$$\rho'_+(x, y) = \|x\| \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\|}{t}.$$

W pracy (1-S) autor rozważa problem postawiony w monografii Alsiny, Sikorskiej i Tómasa, pytający o charakteryzację funkcji f na rzeczywistej przestrzeni Banacha spełniających równanie

$$\rho'_+(f(x), y) = \rho'_+(x, f(y));$$

taka zależność uogólnia pojęcie samosprężonego operatora w przestrzeni Hilberta. Główny wynik artykułu dowodzi w szczególności, że funkcja $f : X \rightarrow X$ samosprężona w sensie wspomnianego równania funkcyjnego jest liniowa i ciągła o ile norma przestrzeni X jest gładka na gęstym zbiorze; taką własność ma każda ośrodkowa przestrzeń Banacha. Wspomniany wynik prowadzi do bardzo czytelnej charakteryzacji samosprężoności w ośrodkowej przestrzeni postaci $C(K)$ (to znaczy gdy K jest kompaktem metrycznym).

Uwaga dotycząca Twierdzenia 5.1: fakt, że funkcje osiągające maximum w jednym punkcie przestaje oczywiście zachodzić dla niemetrycznych K (na przykład każda ciągła funkcja na kostce Cantora $\{0, 1\}^{\omega_1}$ osiąga maksimum na domkniętym zbiorze typu G_δ , który jest dużej mocy). W związku z tym można rozważyć pytanie, co się dzieje z tezami Twierdzenia 5.3 dla niemetrycznych kompaktów K .¹

¹Zagadnienie różniczkowania normy w nieośrodkowych przestrzeniach Banacha jest omawiane na przykład w artykule Godefroy *Renormings of Banach spaces* patrz Handbook of geometry of Banach spaces.



2.3. Średniowalne półgrupy operatorów. . Praca (5-N) napisana wraz z Piotrem Niemcem wyróżnia się tematycznie na tle innych prac cyklu. Autorzy rozważają tu reprezentacje abstrakcyjnych semigrup (z topologią lub bez) w przestrzeni operatorów na ustalonej przestrzeni Banacha. Rozważa się dwie koncepcje średniowalności i ich związki z istnieniem minimalnych projekcji. Warto zwrócić uwagę na Twierdzenie 4.13, które, przy pewnych założeniach co do ciągłości danej reprezentacji, orzeka że operatory reprezentacji zachowują pewien semi-iloczyn skalarny generujący równoważną normę (jest to daleko idące uogólnienie starego wyniku Koehlera i Rosenthala). Twierdzenie to pozostaje w duchu innych dokonań habilitanta, które są często związane z badaniem ‘hilbertowskich’ własności przestrzeni bez iloczynu skalarnego. Na marginesie warto zauważyć, że koncepcja średniowalności, wywodząca się z teorii grup posiadających niezmienniczą miarę skończenie addytywną,² pojawia się obecnie w bardzo odległych dziedzinach matematyki. Tak zwana mocna średniowalność to żywy nurt deskryptywnej teorii mnogości i teorii modeli.

3. OCENA OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Poprzedni rozdział nosi skromny tytuł, jako że nie próbuje nawet pobieżnie zasygnalizować wszystkich zagadnień, którym poświęcone są prace cyklu, przedstawionego przez dr. Wójcika; istotna część dorobku habilitanta dotyczy teorii aproksymacji.

Niniejszej oceny dokonuje matematyk, który kocha przestrzeń Banacha, ale poświęca swoją uwagę ich izomorficznej, a nie izometrycznej strukturze, na ogół poruszając się w świecie nieośrodkowym. Nie jestem więc specjalistą w obszarze badań habilitanta, ale po analizie jego dorobku doszedłem do następujących wniosków.

- (A+) Artykuły cyklu dobrze wpisują się w aktualnie uprawiane wątki geometryczne teorii przestrzeni Banacha, a przedstawione rezultaty dotyczą subtelnych własności norm i nierzadko wymagają złożonych argumentów.
- (B+) Niektóre rezultaty odpowiadają na pytania stawiane przez specjalistów, wynikają z naturalnego rozwoju danej tematyki, czasami uogólniają dość znane twierdzenia o posmaku klasycznym.
- (C+) Percepcja dokonań dr. Wójcika w gronie specjalistów jest dobra; jego prace wydają się uprawiać dialog z gronem matematyków, którzy poświęcają swoją uwagę podobnym zagadnieniom.

Jest jasne, że obszerność samej habilitacji i bardzo duża, jak na ten etap rozwoju naukowego liczba publikacji znacząco wyróżniają się pod względem parametrów czysto ilościowych. Mam silne wrażenie, że nie pozostaje to bez wpływu na jakość dokonań dr. Wójcika i to jest źródłem poniższych spostrzeżeń.

²stąd moje tłumaczenie terminu amenable



- (a-) Artykuł (5-N) zdaje się inicjować nowe kierunki badań i może zainteresować szersze grono odbiorców. Według zgodnych oświadczeń współautora publikacji i habilitanta, to ten pierwszy miał decydujący wpływ na kształt zaprezentowanych wyników. Piszę o tym dlatego, że pozostałym publikacjom cyklu można zarzucić nieco rzemieślniczy charakter, nadmierne eksploatowanie pewnych utartych ścieżek, może nawet przesadne zanurzanie się w technikalnia.
- (b-) Ujmując to inaczej, w obszernym dorobku kandydata nie ma zbyt wielu rezultatów *ważkich*, takich którymi można pochwalić się czasopismach ogólnomatematycznych.

Jak już wspominałem, wiele z zaprezentowanych twierdzeń ma charakter dość techniczny i ocena ich wartości wymaga bardzo specjalistycznej wiedzy. Tutaj bardzo pomocny był autoreferat, dobrze przemyślany tekst, w którym autorowi udało się uwypuklić główne wątki prowadzonych badań i przedstawić je na tle poprzednich dokonań. Deklaracja ze wstępu *Pisząc ten autoreferat starałem się utrzymać nieformalny, swobodny styl w celu jasnego i płynnego przedstawienia głównych motywacji...* została więc w moim odczuciu zrealizowana.³

Autoreferat jest rzecz jasna bardzo obszerny, być może trudno skrócić ten tekst, ale może warto było odchudzić habilitację? Autor publikuje dużo, zapewne pod ogarniającą nas wszystkich presją sprawozdawczości. Myślę, że mniej prac skutecznie domykających pewne wątki pozwoliło by uniknąć niektórych powtórzeń, a nawet zaprezentować swoje rezultaty w bardziej atrakcyjnej formie?

4. CAŁOŚĆ DOROBKU

Według bazy MATHSCI.NET dr. Paweł Wójcik opublikował 56 artykułów; pierwszy ukazał się 2010 roku, co daje średnią cztery publikacje rocznie; łączna ilość cytowań wynosi obecnie 298. Habilitant nie wyróżnia się specjalnie mobilnością, w tym miejscu autoreferat jest dość enigmatyczny. Trzeba jednak zaznaczyć, że nawiązał realną współpracę ze sporym gronem matematyków, także tych z zagranicy. Był stypendystą MNiSW oraz realizował grant NCN.

5. KONKLUZJA

Wyrażone powyżej opinie pozytywne i odrobina krytycyzmu sumują się do konkluzji, że recenzowana habilitacja jest bardzo solidna, ale nie można uznać jej za wyróżniającą.

Z przyjemnością mogę stwierdzić, że dr Paweł Wójcik przedstawił osiągnięcie naukowe w postaci cyklu 12 publikacji, które wnoszą istotny wkład do uprawianej przez niego dyscypliny matematycznej. Całość jego dorobku naukowego spełniają wymagania ustawowe i zwyczajowe oczekiwania środowiska matematycznego. Popieram wniosek o nadanie Pawłowi Wójcikowi stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

³Drobna uwaga: termin **Propozycja x.x** to zupełnie zbędny anglicyzm.